

Arquitectura de Computadores I

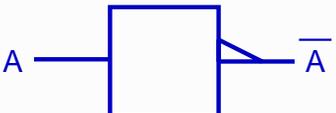
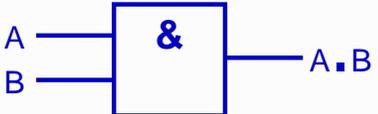
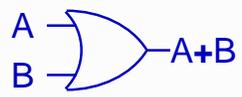
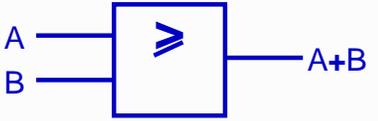
I - Introdução

António M. Gonçalves Pinheiro

Departamento de Física
Universidade da Beira Interior
Covilhã - Portugal

pinheiro@ubi.pt

Algebra de Boole

Operação Lógica	Simbologia Matemática	Tabela de Verdade	Simbologia Electrónica	Simbologia IEEE															
NOT	$F = \bar{A}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>\bar{A}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	\bar{A}	0	1	1	0											
A	\bar{A}																		
0	1																		
1	0																		
AND	$F = A \cdot B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A \cdot B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	$A \cdot B$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1		
A	B	$A \cdot B$																	
0	0	0																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	
OR	$F = A + B$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>$A + B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	$A + B$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1		
A	B	$A + B$																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	1																	



Algebra de Boole

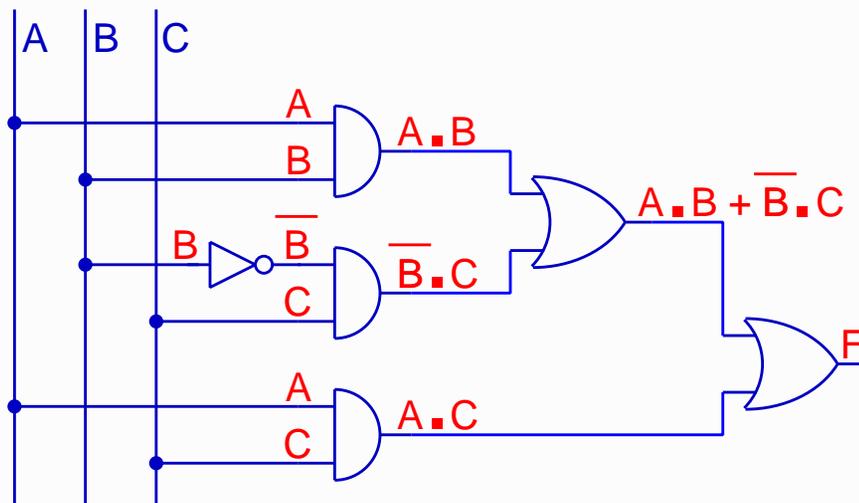
Exemplo de função:

$$F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C) + A \cdot C$$

Tabela de Verdade

A	B	C	$A \cdot B$	\bar{B}	$\bar{B} \cdot C$	$A \cdot B + \bar{B} \cdot C$	$A \cdot C$	F
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

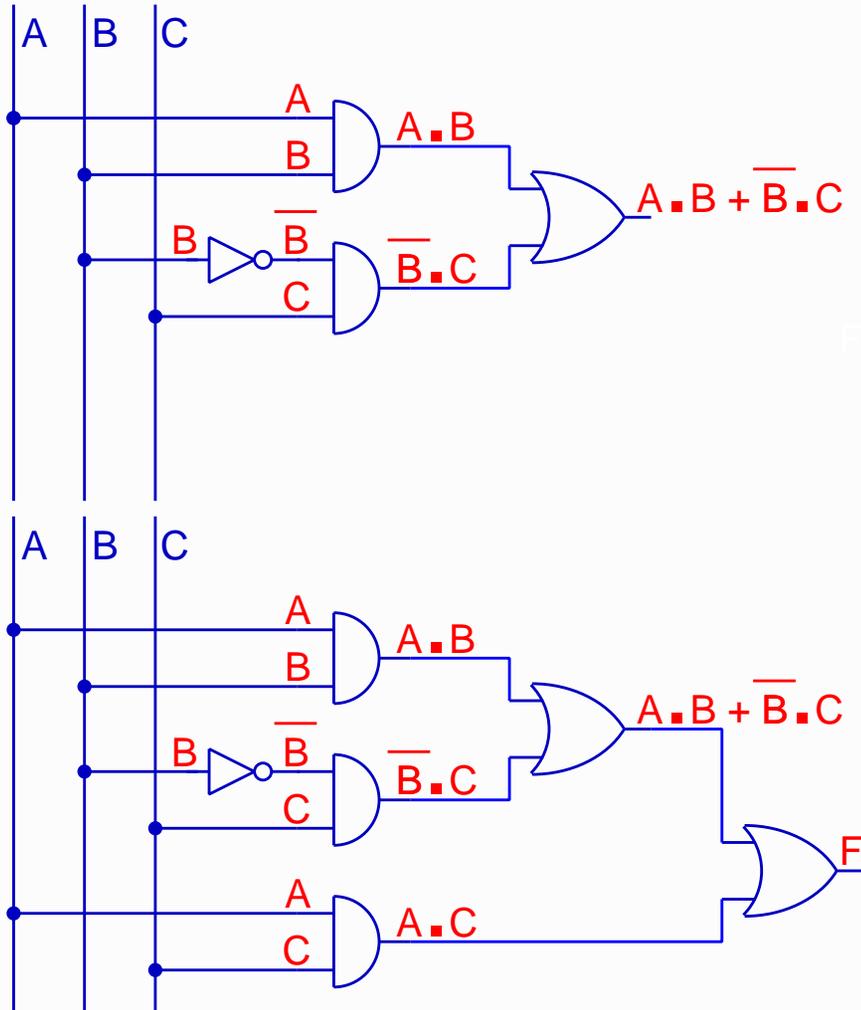
Circuito Lógico



Algebra de Boole

Exemplo de função: $F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C) + A \cdot C$
Circuito Lógico

Tabela de Verdade



A	B	C	$A \cdot B + \bar{B} \cdot C$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

⇒ Algebra de Boole

⇒ Mapas de Karnaugh



Exemplo de Aplicação de Álgebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Álgebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitetura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitetura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A - Tem aprovação a pelo menos 20 créditos

B - É aluno de Engenharia Informática

\overline{B} - É aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação

C - Tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A - Tem aprovação a pelo menos 20 créditos

B - É aluno de Engenharia Informática

\bar{B} - É aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação

C - Tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Condição 1 \longrightarrow $A \cdot B$

Condição 2 \longrightarrow $\bar{B} \cdot C$

Condição 3 \longrightarrow $A \cdot C$

Condição Final \longrightarrow $F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C) + A \cdot C$

Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A	B	C	$A \cdot B + \bar{B} \cdot C$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

A - Tem aprovação a pelo menos 20 créditos

B - É aluno de Engenharia Informática

\bar{B} - É aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação

C - Tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Condição 1 $\rightarrow A \cdot B$

Condição 2 $\rightarrow \bar{B} \cdot C$

Condição 3 $\rightarrow A \cdot C$

Condição Final $\rightarrow F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C) + A \cdot C$



Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A	B	C	$A \cdot B + \bar{B} \cdot C$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.
 Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$A \cdot B \cdot \bar{C}$	$A \cdot B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

$\Rightarrow A \cdot B \cdot \bar{C}$
 $\Rightarrow A \cdot B \cdot C$

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e
 É aluno de Engenharia Informática

$A \cdot B$

=

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e
 É aluno de Engenharia Informática e
 Tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow A \cdot B \cdot C$

ou

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e
 É aluno de Engenharia Informática e
 Não tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow A \cdot B \cdot \bar{C}$



Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.
 Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A	B	C	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	$A \cdot \bar{B} \cdot C$	$\bar{B} \cdot C$	
0	0	0	0	0	0	$\Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	$\Rightarrow A \cdot \bar{B} \cdot C$
1	0	1	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	

É um aluno de Tecn. e Sist. da Informação e tem aprovação na disciplina de AC I

Não tem aprovação a pelo menos 20 créditos e É aluno de Tecn. e Sist. da Informação e Tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$

= **ou**

$\bar{B} \cdot C$

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e É aluno de Tecn. e Sist. da Informação e Tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow A \cdot \bar{B} \cdot C$



Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.
 Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$A \cdot B \cdot \bar{C}$	$A \cdot B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

$\Rightarrow A \cdot \bar{B} \cdot C$
 $\Rightarrow A \cdot B \cdot C$

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de AC I

=

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e É aluno de Engenharia Informática e Tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow A \cdot B \cdot C$

ou

Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e É aluno de Tecn. e Sist. da Informação e Tem aprovação na disciplina de AC I $\longrightarrow A \cdot \bar{B} \cdot C$



Exemplo de Aplicação de Algebra de Boole

Formalize o seguinte problema em termos de Algebra de Boole.

Um Aluno pode matricular-se a uma determinada disciplina de opção se cumprir pelo menos um dos seguintes requisitos:

1. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e é aluno de Engenharia Informática
2. É um aluno de Tecnologias e Sistemas da Informação e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I
3. Tem aprovação a pelo menos 20 créditos e tem aprovação na disciplina de Arquitectura de Computadores I

Nota: Considere que a disciplina em questão só faz parte dos planos curriculares dos cursos de Engenharia Informática e Tecnologias e Sistemas da Informação.

$$F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C) + A \cdot C$$

$$F = (A \cdot B + \bar{B} \cdot C)$$

$$F = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$A \cdot B \cdot \bar{C}$	$A \cdot \bar{B} \cdot C$	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$	$A \cdot B \cdot \bar{C}$	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1



Propriedades da Algebra de Boole

Princípio da dualidade Considere duas funções booleanas f e g , tais que $f = g$. Então existem duas funções f_D e g_D duais de f e g respectivamente que são também iguais, $f_D = g_D$. Uma função dual obtém-se a partir da inicial trocando:

$$\begin{array}{lcl} + \text{ (OR)} & \implies & \cdot \text{ (AND)} \\ \cdot \text{ (AND)} & \implies & + \text{ (OR)} \\ 1 & \implies & 0 \\ 0 & \implies & 1 \end{array}$$

e mantendo a ordem das operações.

NOTA: $f = g \implies f_D = g_D$, mas $f \neq f_D$ e $g \neq g_D$

Propriedades da Algebra de Boole

Teoremas com uma só variável

Número Neutro	$X+0=X$	$X \cdot 1=X$
Número Absorvente	$X+1=1$	$X \cdot 0=0$
Idempotência	$X+X=X$	$X \cdot X=X$
Complementação	$X+\bar{X}=1$	$X \cdot \bar{X}=0$
Involução	$\overline{(\bar{X})}=X$	

Propriedades da Algebra de Boole

Teoremas com duas ou mais variáveis

Comutatividade	$X+Y=Y+X$	$X \cdot Y=Y \cdot X$
Associatividade	$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$	$(X \cdot Y) \cdot Z=X \cdot (Y \cdot Z)$
Distributividade	$X \cdot (Y+Z)=X \cdot Y+X \cdot Z$	$X+Y \cdot Z=(X+Y) \cdot (X+Z)$
Absorção Total	$X+X \cdot Y=X$	$X \cdot (X+Y)=X \cdot Y$
Absorção Parcial	$X+\bar{X} \cdot Y=X+Y$	$X \cdot (\bar{X}+Y)=X \cdot Y$
Consenso	$X \cdot Y+\bar{X} \cdot Z+Y \cdot Z=X \cdot Y+\bar{X} \cdot Z$	$(X+Y) \cdot (\bar{X}+Z) \cdot (Y+Z)=(X+Y) \cdot (\bar{X}+Z)$
Teorema de D'Morgan	$\overline{X+Y}=\bar{X} \cdot \bar{Y}$	$\overline{X \cdot Y}=\bar{X}+\bar{Y}$
	$\overline{X+Y+Z+\dots}=\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \dots$	$\overline{X \cdot Y \cdot Z \cdot \dots}=\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}+\dots$