Análise e Processamento de Sinal e Imagem

I - Introdução

António M. Gonçalves Pinheiro

Departamento de Física
Universidade da Beira Interior
Covilhã - Portugal

pinheiro@ubi.pt

Objectivos

- Estudar as características dos Sinais Temporais Contínuos e Discretos
- Processamento de Sinais em Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo
- Projecto de Filtros Analógicos e Digitais
- Análise e Processamento de Sinais Aleatórios
- Estudar a representação e as características de imagem
- Técnicas de Processamento e Análise de Imagem
- Estudar técnicas de caracterização e reconhecimento da informação

Programa

1. **Sinais Contínuos e Sinais Discretos**
   (a) Representação de Sinais Contínuos e Sinais Discretos
   (b) Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo
   (c) Representação Temporal e em Frequência
2. **Filtros**
   (a) Filtros de Sinais Contínuos
   (b) Diagramas de Bode
   (c) Amostragem de Sinais Contínuos
   (d) Filtros de Sinais Digitais
   (e) Filtros IIR e FIR

Programa

3. **Sinais Aleatórios e Filtragem Óptima**
   (a) Noção de Sinal Aleatório
   (b) Sinais Estocásticos, Processos Ergódicos e Sinais Estacionários
   (c) Funções de Correlação
   (d) Função espectral de Potência
   (e) Filtros de Wiener
   (f) Filtro de Kalman

Programa

4. **Processamento de Imagem - Introdução**
   (a) Aquisição e Representação de Imagem
   (b) Convolução espacial e Filtragem de Imagem
   (c) Transformadas Bidimensionais
   (d) Análise Espectral de Imagem
5. **Processamento de Imagem - Filtragem**
   (a) Filtro FIR bidimensionais
   (b) Filtros estimadores óptimos bidimensionais (Wiener e de Kalman)

Programa

6. **Análise de Imagem**
   (a) Técnicas básicas Análise de Imagem
   (b) Morfologia de Imagem Binária e Multinível
   (c) Detectores de Arestas
   (d) Segmentação de Imagem
   (e) Descrição de Imagem
7. **Reconhecimento de Padrões**
   (a) Caracterização de Sinais e Imagem
   (b) Técnicas de Classificação

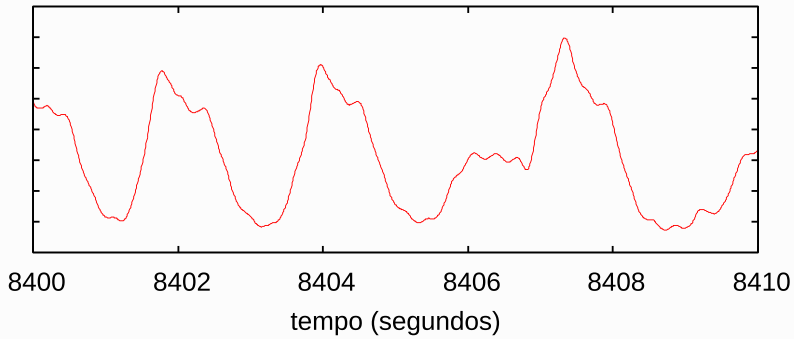
Bibliografia

1. S. Haykin and B. Van Veen, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2nd edition, 2003.
2. Monsoon H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1996.
3. William K. Pratt, *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, Inc.,3rd edition, 2001.
4. Linda G. Shapiro and George C. Stockman, *Computer Vision*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.
5. J.G. Proakis and D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms*, Prentice Hall, New Jersey, 4th edition, 1996.

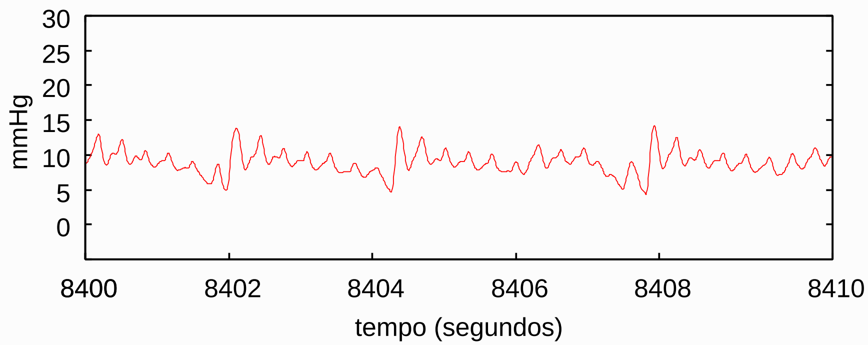
Bibliografia

5. A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signals & Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2nd edition, 1997.
6. John W. Woods, *Multidimensional Signal, Image and Video Processing and Coding*, Academic Press, 2006.
7. Richard O. Duda, Peter E. Hart, and David G. Stork, *Pattern Classification*, Wiley Interscience, 2nd edition, 2000.
8. B. Girod, R. Rabenstein, and A. Stenger, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, 2001.
9. R.M. Gray and L.D. Davisson, *Introduction to Statistical Signal Processing*, Cambridge University Press, 2004.
10. L. Scharf, *Statistical Signal Processing*, Addison Wesley, 1991.

Exemplos de sinais temporais

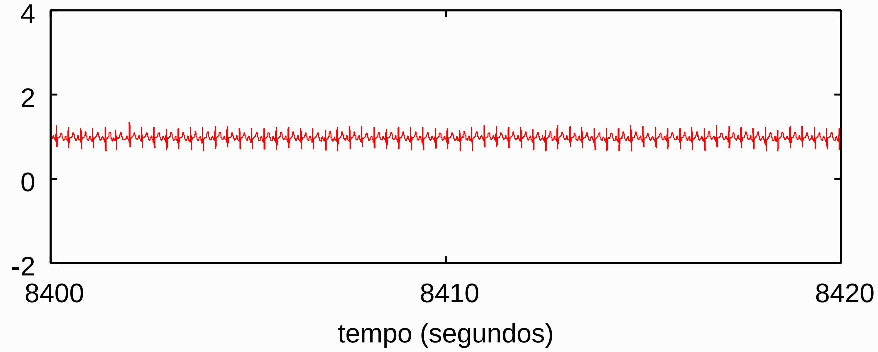


Medida da Respiração



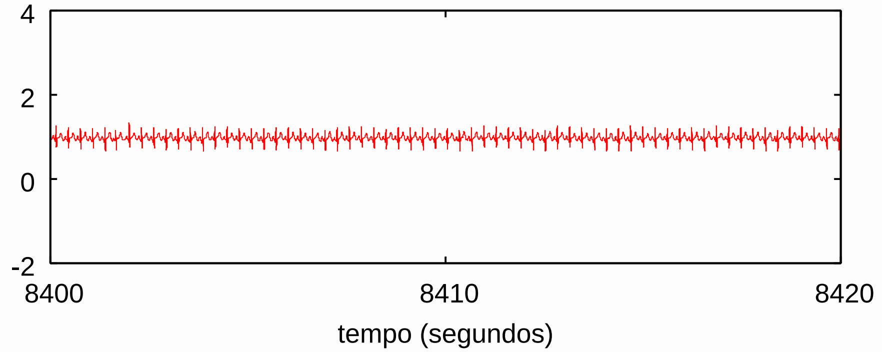
Medida da Pressão Venosa Central

Exemplos de sinais temporais

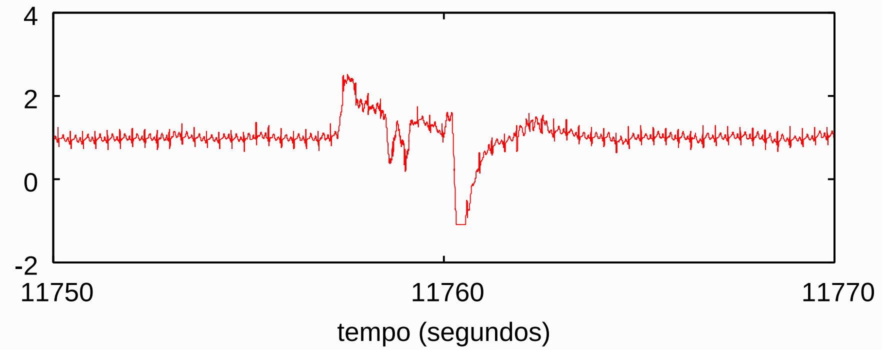


Electrocardiograma

Exemplos de sinais temporais

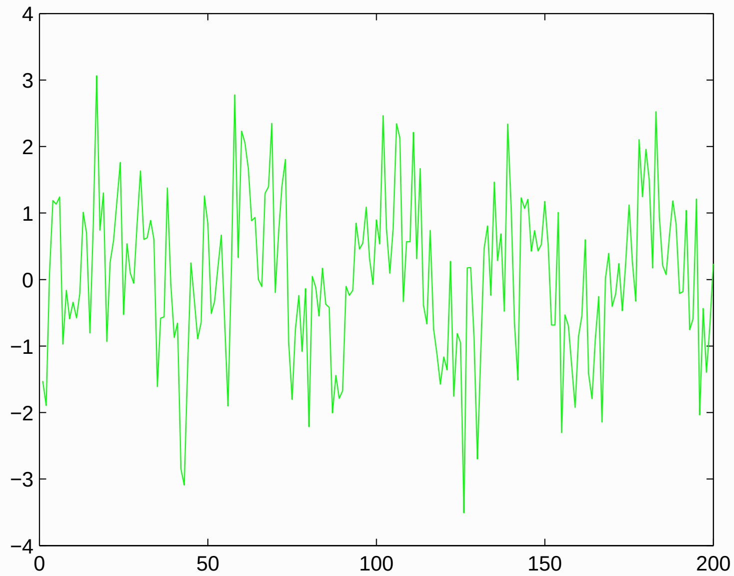


Electrocardiograma



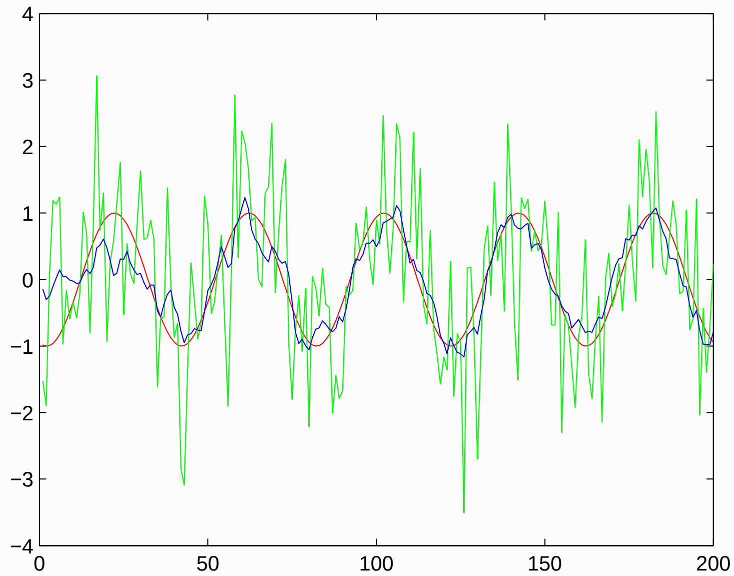
Electrocardiograma (influência do ruído)

Exemplos de sinais temporais



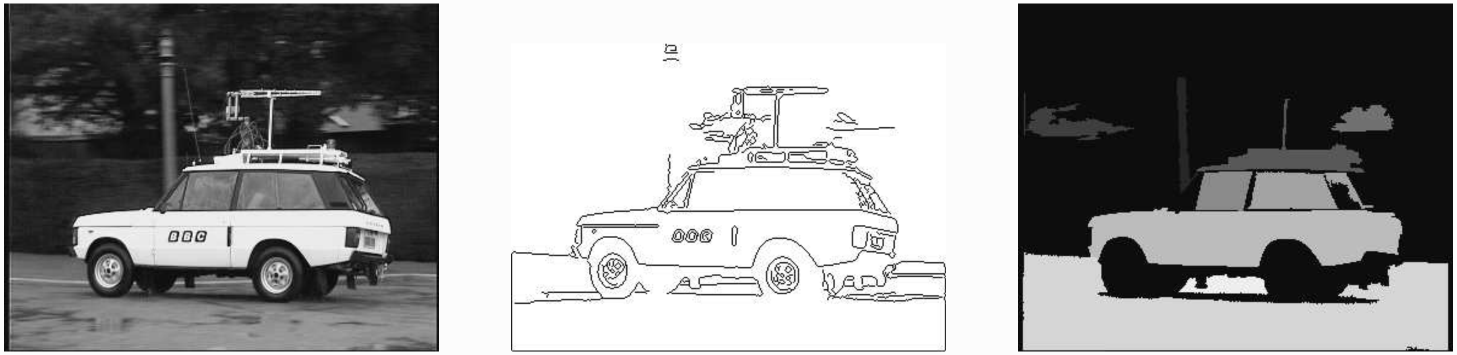
Sinal corrompido com ruído

Exemplos de sinais temporais



Eliminação de ruído

Exemplos de processamento de imagem



Detecção de Arestas e Segmentação

Exemplos de processamento de imagem

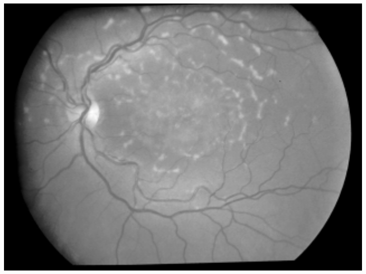
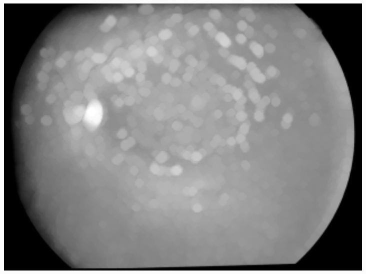
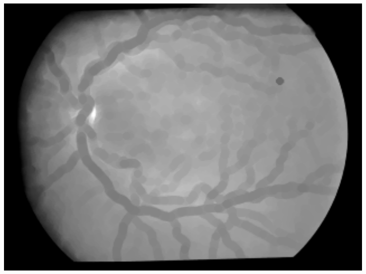


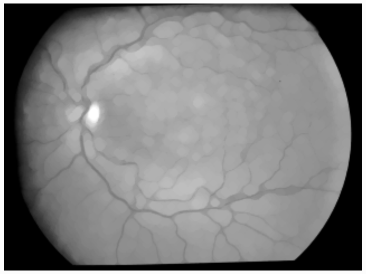
Imagem de olho com Patologia “Stargardt”(manchas no olho)



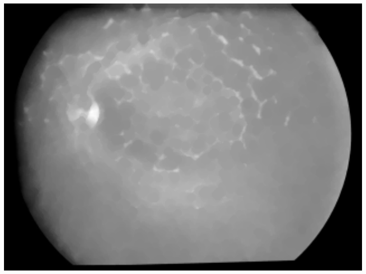
(Dilatação)



(Erosão)



(Abertura)



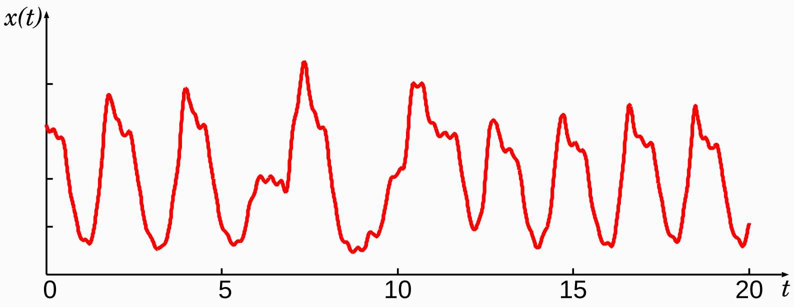
(Fecho)

Operações Morfológicas

Sinais Contínuos e Discretos

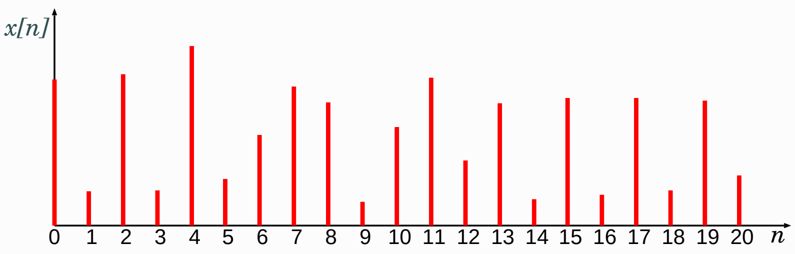
Sinal Contínuo

$$x(t)$$



Sinal Discreto

$$x[n]$$

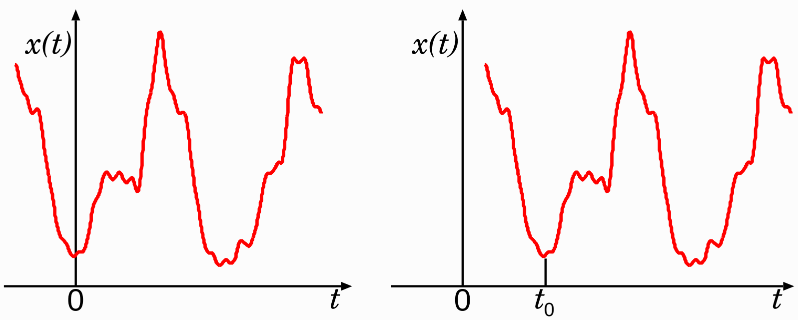


Transformações do sinal

1) Deslocação no tempo

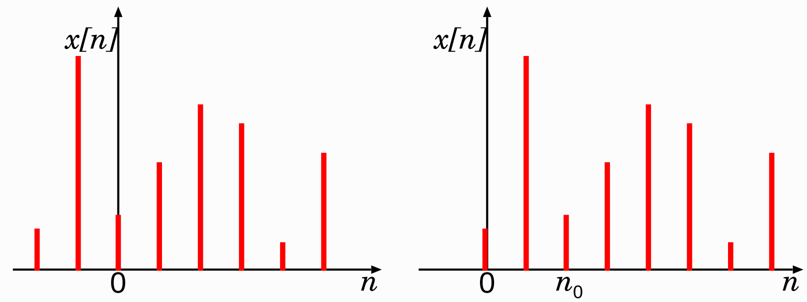
Sinais Contínuos

$$x(t) \;\rightarrow\; x(t - t_0)$$



Sinais Discretos

$$x[n] \;\rightarrow\; x[n - n_0]$$



$t_0 > 0$, $n_0 > 0$ - Atraso

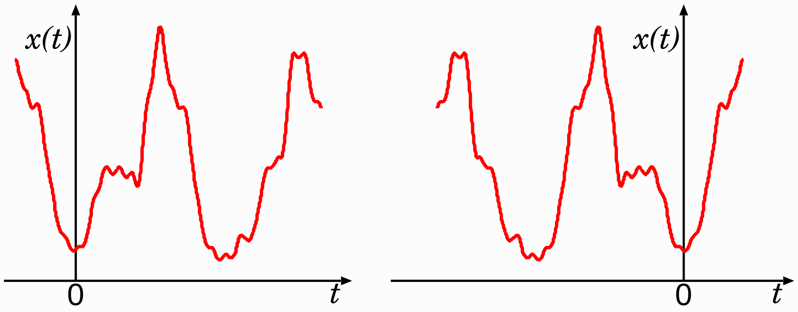
$t_0 < 0$, $n_0 < 0$ - Avanço

Transformações do sinal

1) Reversão temporal

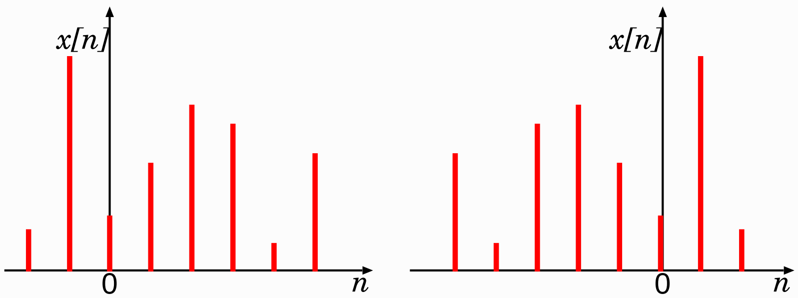
Sinais Contínuos

$$x(t) \;\rightarrow\; x(-t)$$



Sinais Discretos

$$x[n] \;\rightarrow\; x[-n]$$

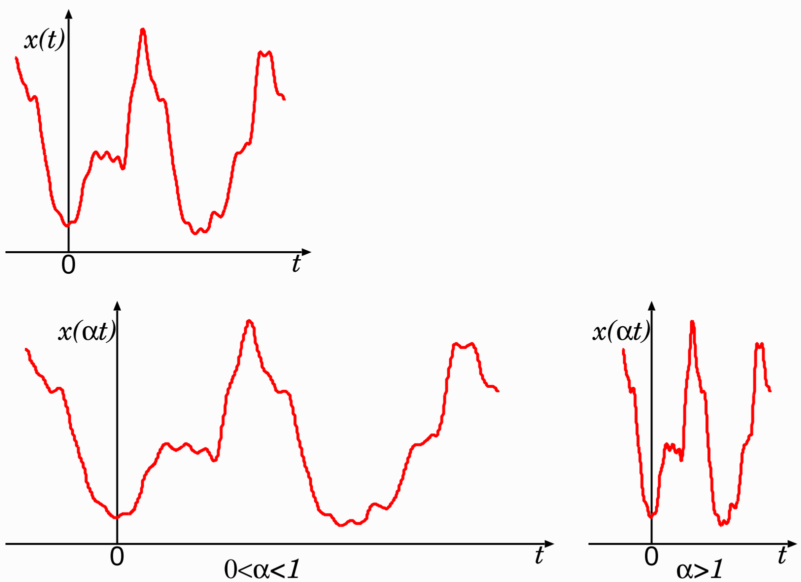


Transformações do sinal

1) Escalonamento temporal

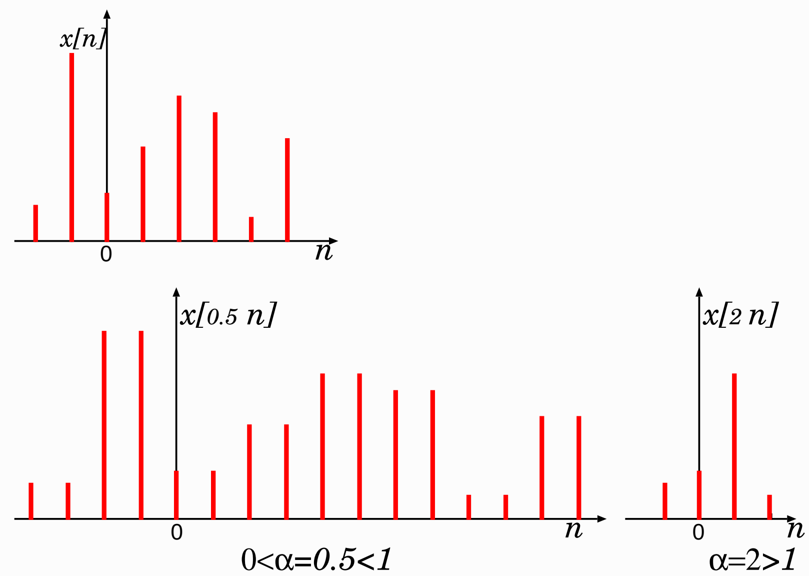
Sinais Contínuos

$$x(t) \rightarrow x(\alpha\, t)$$



Sinais Discretos

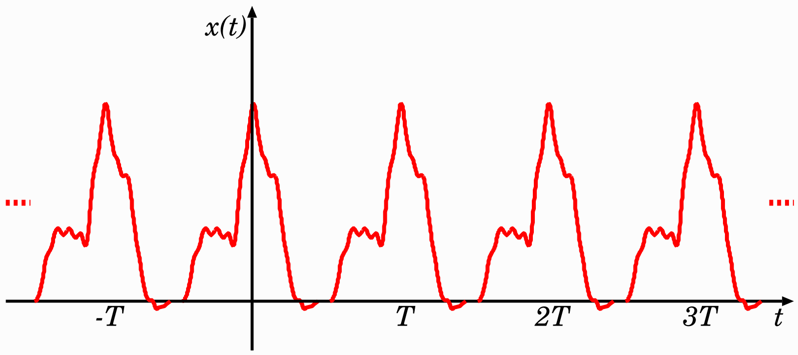
$$x[n] \rightarrow x[\alpha\, n]$$



Sinais periódicos

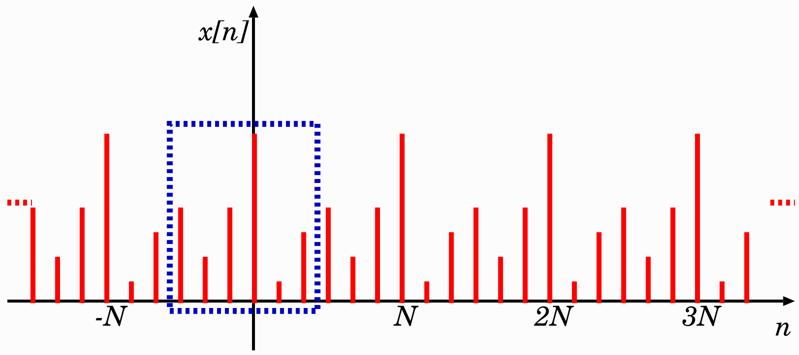
Sinais Contínuos

$$x(t) = x(t + mT)$$



Sinais Discretos

$$x[n] = x[n + mN]$$



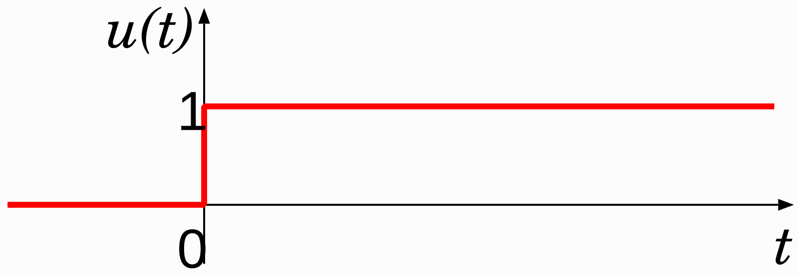
Período Fundamental - T

Período Fundamental - N

Sinal escalão

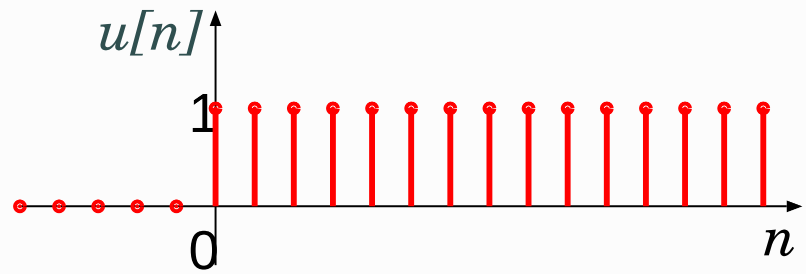
Sinal Contínuo

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Sinal Discreto

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Sinal impulso unitário ou delta de dirac

Sinal Contínuo

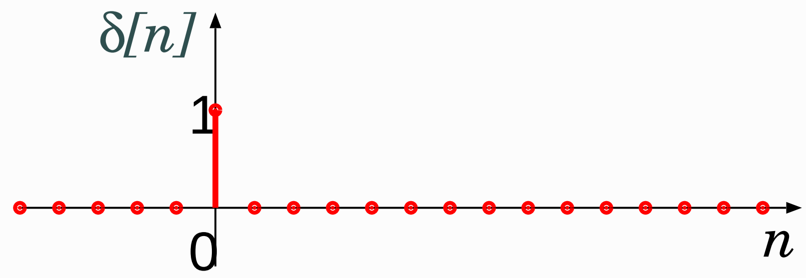
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Sinal Discreto

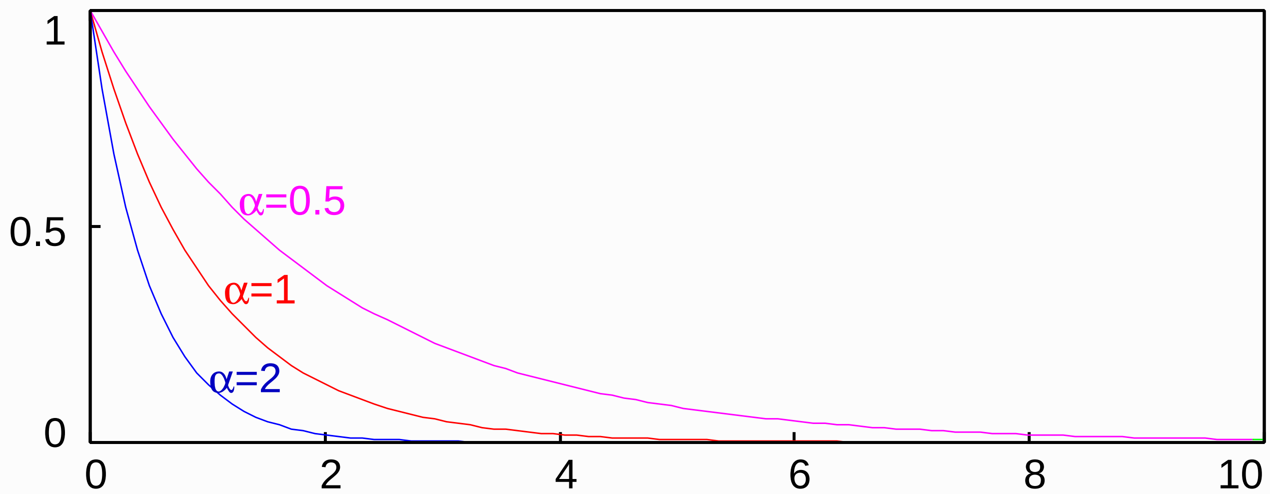
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

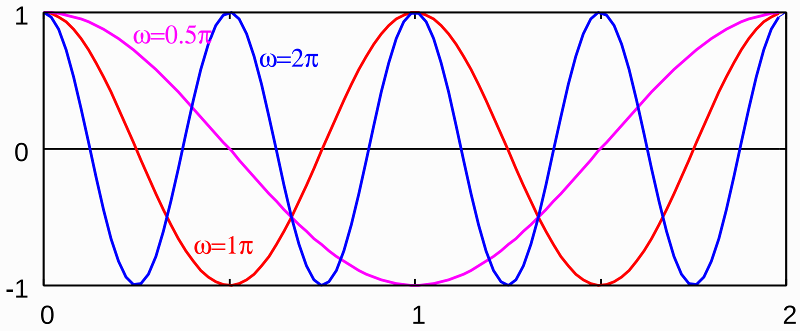
Sinal Exponencial

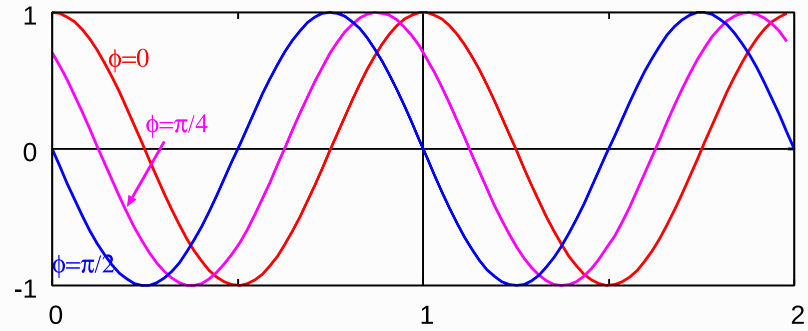
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$



Sinal Sinusoidal

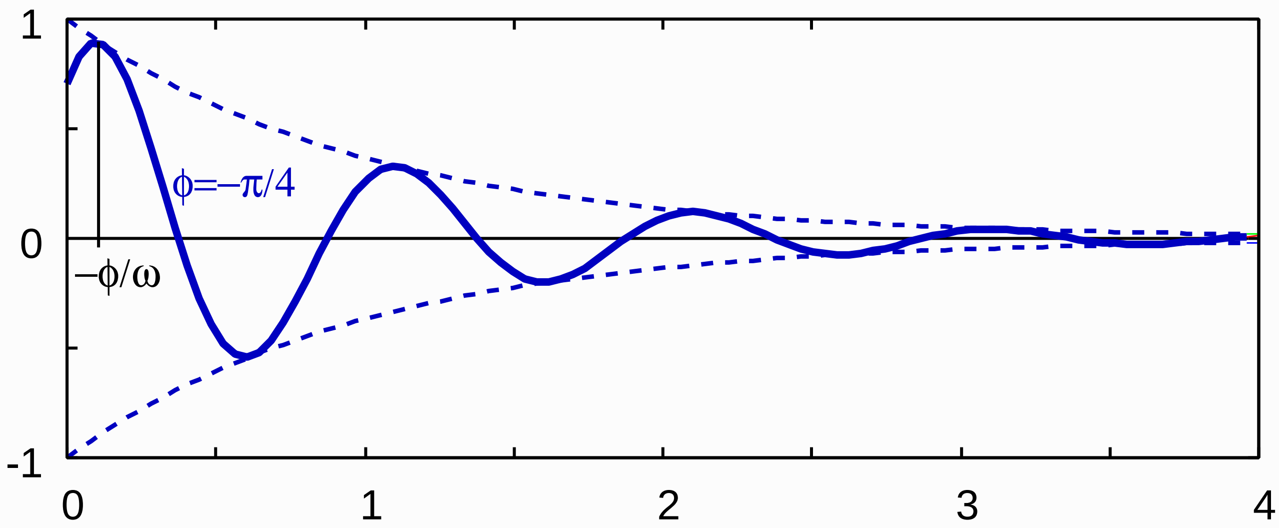
$$x(t) \; = \; \cos(\omega t + \phi)\,, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$





Sinal Sinusoidal exponencial

$$x(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$$



Sistemas

Sistema Contínuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

Sistema Discreto

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n]$$

Propriedades dos sistemas

1) Memória

Num sistema sem Memória a *saída em cada momento só depende da entrada nesse momento*

2) Invertibilidade e Sistema Inverso

Um sistema é *invertível* se entradas distintas originam saídas distintas:

$$x_1[n] \neq x_2[n] \;\Rightarrow\; y_1[n] \neq y_2[n]$$

Se o sistema é *invertível*, então o sistema *inverso* existe.

3) Causalidade

Um sistema é *causal* se a saída num dado momento só depende do tempo *presente* e do tempo *passado*

4) Estabilidade

Um sistema é *estável* se entradas pequenas levam a saídas que não divergem.

Estabilidade BIBO - "Bounded Input Bounded Output":

$$|x\,[n]| < L_x \;\Rightarrow\; |y\,[n]| < L_y$$

Propriedades dos sistemas

5) Invariância Temporal

Um sistema é invariante no tempo se o *comportamento* e as *características* do sistema são fixas no tempo: $x[n] \rightarrow y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$

6) Linearidade

Um sistema é linear se respeita as seguintes propriedades:

6.1) Aditiva: $x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n]$

6.2) Homogénea: $ax[n] \rightarrow ay[n]$, com $a \in C$

De forma genérica podemos dizer que: $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \rightarrow a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$, com $a_1, a_2 \in C$

Nota: Entrada 0 resulta em saída 0.

Sistema Linear e Invariante no Tempo

Sistemas que gozam das propriedades:

- Invariância no Tempo
- Linearidade

Convolução

Sistema Contínuo

$$y(t) = x(t) \oplus h(t) \; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$h(t)$ - resposta impulsiva do
sistema linear e invariante no tempo

Sistema Discreto

$$y[n] = x[n] \oplus h[n] \; = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

$h[n]$ - resposta impulsiva do
sistema linear e invariante no tempo

Sistema Linear e Invariante no Tempo

Propriedades da Convolução:

1. Comutatividade: $x \oplus y = y \oplus x$
2. Associatividade: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
3. Distributividade: $x \oplus (y + z) = x \oplus y + x \oplus z$
4. Elemento Identidade: $\delta \Rightarrow \delta \oplus x = x$
5. Elemento Absorvente: $O \Rightarrow O \oplus x = 0$, em que $O = 0$
6. Atraso: $x(t) \oplus \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Representação temporal e em frequência

	Sinal Contínuo	**Sinal Discreto**
Representação Temporal	$x(t)$	$x[n]$
Representação em Frequência Sinais Periódicos **Série de Fourier**	Período $T_0,\ \omega_0 = 2\pi/T_0$ $a[k] = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]e^{jk\omega_0 t}$	Período $N_0,\ \Omega_0 = 2\pi/N_0$ $a[k] = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jkn\Omega_0}$ $x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a[k]e^{jkn\Omega_0}$
Representação em Frequência **Transformada de Fourier**	Transformada Contínua $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	Transformada Discreta $X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Contínuos)

Definição

$$x(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]e^{jk\omega_0 t}\;,\;\; \text{com } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

T_0 - Período Fundamental

Inversa

$$a[k] \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Sinais Reais

$$x(t) \;=\; a_0 \;+\; 2\sum_{k=1}^{+\infty} A[k]cos\left(k\omega_0 t + \phi_k\right)\;,\;\; \text{com } a[k] = A[k]e^{j\phi_k}$$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Contínuos) - Propriedades

Propriedade	Função	Série
Linearidade	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 a_1[k] + \alpha_2 a_2[k]$
Deslocamento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-jk\omega_0 t_0}\, a[k]$
Deslocamento na frequência	$e^{jM\omega_0 t}\, x(t)$	$a[k - M]$
Escalamento Temporal	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$ Periódica com período T_0/α	$a[k]$
Reversão Temporal	$x(-t)$	$a[-k]$
Convolução periódica	$\int_{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$T_0 a_1[k] a_2[k]$
Multiplicação	$x_1(t) x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_1[l] a_2[k - l]$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Contínuos) - Propriedades

Propriedade	Função	Série
Diferenciação no Domínio do Tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0 a[k]$
Integração no Domínio do Tempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad (a[0]=0)$	$\frac{1}{jk\omega_0}a[k]$
Conjugação	$x^*(t)$	$a^*[-k]$
Simetria do Conjugado para Sinais Reais	$x(t) \in \Re\,\text{(real)}$	$\begin{cases} a[k] = a^*[-k] \\ \Re e\{a[k]\} = \Re e\{a[-k]\} \\ \Im m\{a[k]\} = -\Im m\{a[-k]\} \\ \lvert a[k]\rvert = \lvert a[-k]\rvert \\ \arg\{a[k]\} = -\arg\{a[-k]\} \end{cases}$
Sinais Reais e Pares	$x(t) \in \Re\,\text{(real) e par}$	$a[k]$ real e par
Sinais Reais e Ímpares	$x(t) \in \Re\,\text{(real) e ímpar}$	$a[k]$ imaginário puro e ímpar

Série de Fourier (Sinais Periódicos Contínuos) - Propriedades

Relação de Parseval para Sinais Periódicos

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt \; = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a[k]|^2$$

Série de Fourier (Sinais Contínuos) - Tabela

Função	Série
$e^{j\omega_0 t}$	$a[1] = 1;\ a[k \neq 1] = 0;$
$x(t) = 1,\ \forall_{T_0>0}$	$a[0] = 1;\ a[k \neq 0] = 0;$
$\cos(\omega_0 t)$	$a[1] = \frac{1}{2};\ a[-1] = \frac{1}{2};\ a[k \neq \pm 1] = 0;$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$a[1] = \frac{1}{j2};\ a[-1] = -\frac{1}{j2};\ a[k \neq \pm 1] = 0;$
Onda periódica quadrada $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert < T_0/2 \end{cases}$	$\frac{\text{sen}\,(k\omega_0 T_0)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\ \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$a[k] = \frac{1}{T_0}$, para todo o k

Transformada de Fourier (Sinais Contínuos)

Definição

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt}$$

Inversa

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Transformada de Fourier (Sinais Contínuos) - Propriedades

Propriedade	Função	Transformada
Linearidade	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(j\omega) + a_2 X_2(j\omega)$
Deslocamento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Deslocamento na Frequência	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X\left(j(\omega - \omega_0)\right)$
Escalamento Temporal	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolução	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(j\omega)\, X_2(j\omega)$
Multiplicação	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left(X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right)$
Diferenciação no Domínio do Tempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integração no domínio do tempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega)$

Transformada de Fourier (Sinais Contínuos) - Propriedades

Relação de Parseval para Sinais Contínuos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Transformada de Fourier (Sinais Contínuos) - Tabela

Função	Transformada	Função	Transformada
$\delta(t)$	1	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{-\alpha t}u(t),\ \Re e\{\alpha\}>0$	$\frac{1}{j\omega+\alpha}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ \Re e\{\alpha\}>0$	$\frac{1}{(j\omega+\alpha)^n}$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]\delta(\omega-k\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$
$e^{-\alpha\|t\|},\ \alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$	$e^{-\omega^2/2}$
$\begin{cases}1, & \|t\|\le T_0\\ 0, & c.c.\end{cases}$	$\frac{2\ \text{sen}\,(Wt)}{\pi t}$	$\frac{2\ \text{sen}\,(\omega T_0)}{\omega}$	$\begin{cases}1, & \|\omega\|\le W\\ 0, & c.c.\end{cases}$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos)

Definição

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a[k] e^{jk2\pi n/N_0}, \text{ sendo } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

N_0 - Período Fundamental

Inversa

$$a[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk2\pi n/N_0}$$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos) - Propriedades

Propriedade	Função	Série
Periocidade	$x[n] = x[n+N]$	$a[k] = a[k+N]$
Linearidade	$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$	$\alpha_1 a_1[k] + \alpha_2 a_2[k]$
Deslocamento Temporal	$x[n-n_0]$	$e^{-jk2\pi n_0/N}\, a[k]$
Deslocamento na frequência	$e^{jM2\pi n/N}\, x[n]$	$a[k-M]$
Reversão Temporal	$x[-n]$	$a[-k]$
Expansão Temporal	$x_m[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{se } n \text{ é múltiplo de } m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{1}{m}\, a[k]$ com período mN

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos) - Propriedades

Propriedade	Função	Série
Convolução periódica	$\sum_{r=\langle N\rangle} x_1[r]x_2[n-r]$	$Na_1[k]a_2[k]$
Multiplicação	$x_1[n]x_2[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_1[l]a_2[k-l]$
Diferença de ordem 1	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{jk2\pi/N}\right)a[k]$
Acumulador	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (valor finito e periódico apenas se $a[0]=0$)	$\frac{1}{1-e^{jk2\pi/N}}a[k]$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos) - Propriedades

Propriedade	Função	Série
Conjugação	$x^*[n]$	$a^*[-k]$
Simetria do Conjugado para Sinais Reais	$x(t) \in \Re$ (real)	$\begin{cases} a[k] = a^*[-k] \\ \Re e\{a[k]\} = \Re e\{a[-k]\} \\ \Im m\{a[k]\} = -\Im m\{a[-k]\} \\ \lvert a[k]\rvert = \lvert a[-k]\rvert \\ \arg\{a[k]\} = -\arg\{a[-k]\} \end{cases}$
Sinais Reais e Pares	$x(t) \in \Re$ (real) e par	$a[k]$ real e par
Sinais Reais e Ímpares	$x(t) \in \Re$ (real) e ímpar	$a[k]$ imaginário puro e ímpar

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos)

Relação de Parseval para Sinais Periódicos Discretos

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle}|a[k]|^2$$

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos) - Tabela

Função	Série	
$e^{j2\pi n/N}$	$a[k] = \begin{cases} 1, & k = m,\ m \pm N,\ m \pm 2N,\ ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	Se $\Omega_0 = \dfrac{2\pi m}{N}$ com $\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$ racional.
$\cos(2\pi n/N)$	$a[k] = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m,\ \pm m \pm N,\ \pm m \pm 2N,\ ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	Se $\Omega_0 = \dfrac{2\pi m}{N}$ com $\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$ racional.
$\text{sen}\,(2\pi n/N)$	$a[k] = \begin{cases} 1/(j2), & k = m,\ m \pm N,\ m \pm 2N,\ ... \\ -1/(j2) & k = -m,\ -m \pm N,\ -m \pm 2N,\ ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	Se $\Omega_0 = \dfrac{2\pi m}{N}$ com $\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$ racional.

Série de Fourier (Sinais Periódicos Discretos) - Tabela

Função	Série
1	$a[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
Onda periódica quadrada $x[n] = \begin{cases} 1, & \|n\| < N_1 \\ 0, & N_1 < \|n\| < N/2 \end{cases}$ com $x[n] = x[n+N]$	$a[k] = \dfrac{\text{sen}(2\pi k/N)(N_1 + 1/2)}{N\text{sen}(2\pi k/2N)}, \ k \neq 0 \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a[k] = \dfrac{2N_1+1}{N}, \ k = 0 \pm N, \pm 2N, \ldots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$a[k] = \dfrac{1}{N}$ Para todo o k.

Transformada de Fourier (Sinais Discretos)

Definição

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = X\left(e^{j(\Omega+2\pi)}\right)$$

Inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Propriedades

Propriedade	**Função**	**Transformada**
Sinais Periódicos	$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a[k]e^{jkn\Omega_0}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]\delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
Linearidade	$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$	$\alpha_1 X_1\left(e^{j\Omega}\right) + \alpha_2 X_2\left(e^{j\Omega}\right)$
Deslocamento no Tempo	$x[n-n_0]$	$e^{j\Omega n_0} X\left(e^{j\Omega}\right)$
Deslocamento na Frequência	$e^{j\Omega_0 n}\, x[n]$	$X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$
Diferença de ordem 1	$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\Omega}\right) X\left(e^{j\Omega}\right)$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Propriedades

Propriedade	Função	Transformada
Acumulador	$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X\left(e^{j\Omega}\right) +$ $\pi X\left(e^{j\phi}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Inversão Temporal	$x[-n]$	$X\left(e^{-j\Omega}\right)$
Diferenciação em Frequência	$nx[n]$	$j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$
Convolução	$x[n] * y[n]$	$X\left(e^{j\Omega}\right) Y\left(e^{j\Omega}\right)$
Multiplicação	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Gamma}\right) Y\left(e^{j(\Omega-\Gamma)}\right) d\Gamma$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Propriedades

Propriedade	Função	Transformada
Conjugado	$x^*[n]$	$X^*\left(e^{-j\Omega}\right)$
Simetria	$x[n]$ Real	$X\left(e^{j\Omega}\right) = X^*\left(e^{-j\Omega}\right)$
	$x[n]$ Imaginário	$X^*\left(e^{j\Omega}\right) = -X\left(e^{-j\Omega}\right)$
	$x[n]$ Real e Par	$\Im m\left\{X\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = 0$
	$x[n]$ Real e Ímpar	$\Re e\left\{X\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = 0$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Propriedades

Relação de Parseval para Sinais Discretos

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\omega$$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Tabela

Função	Transformada
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l\right)$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l\right) + \delta\left(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l\right)$
$\mathrm{sen}(\Omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l\right) - \delta\left(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l\right)$

Função	Transformada
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
1	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$

Transformada de Fourier (Sinais Discretos) - Tabela

Função	Transformada
$\begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\dfrac{\text{sen}\left(\Omega\left(N_1+1/2\right)\right)}{\text{sen}(\Omega/2)}$
$\dfrac{\text{sen}(Wn)}{\pi n} = \dfrac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\dfrac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$\begin{cases} 1, & 0 \leq \lvert\Omega\rvert < W \\ 0, & W < \lvert\Omega\rvert \leq \pi \end{cases}$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$

Função	Transformada
$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(n - lN)$	$\dfrac{2\pi}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \dfrac{2\pi l}{N}\right)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n],\ \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$

Sinais Contínuos e Discretos

	Sinal Contínuo	Sinal Discreto
Representação Temporal	$x(t)$	$x[n]$
	Transformada de Laplace	Transformada Z
	$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$
	$x(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st}\, ds$	$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1}\, dz$
	Transformada Contínua	Transformada Discreta
Representação em Frequência Transformada de Fourier	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$	$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\Omega}$
	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega$

Transformada de Laplace - Propriedades

Propriedade	Função	Transformada	ROC
Linearidade	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$ROC \supseteq ROC\{X_1\} \cap ROC\{X_2\}$
Deslocamento temporal	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	não afectado
Deslocamento no domínio s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$\Re e\{s\}$ deslocado de $\Re e\{s_0\}$ à direita
Escalamento temporal	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalado por um factor de a
Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	
Convolução	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	
Diferenciação no domínio do tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	$ROC \supseteq ROC\{X\}$
Integração no domínio do tempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$ROC \supseteq ROC\{X\} \cap \{s : \Re\{s\} > 0\}$

Transformada de Laplace - Propriedades (Continuação)

Teorema do Valor Inicial

Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e não contem qualquer impulso ou qualquer singularidade de ordem mais elevada, então

$$x(0^+) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)$$

Teorema do Valor Final

Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e se $x(t)$ tem um limite finito quando $t \to +\infty$ então

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Transformada de Laplace - Tabela

Função	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	$s \in C$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} < 0$

Função	Transformada	ROC
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	$s \in C$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} > \Re e\{-a\}$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} < \Re e\{-\alpha\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} > \Re e\{-\alpha\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} < \Re e\{-\alpha\}$

Transformada de Laplace - Tabela (continuação)

Função	Transformada	ROC
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > \Re e\{-\alpha\}$
$\text{sen}(\omega_0 t)u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
$e^{-\alpha t}\,\text{sen}(\omega_0 t)u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > \Re e\{-\alpha\}$

Transformada Z - Propriedades

Propriedade	Função	Transformada
Linearidade	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Deslocamento Temporal	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$
Escalamento no Domínio z	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j\omega_0}z)$
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Reversão Temporal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
Expansão temporal	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$

Transformada Z - Propriedades (continuação)

Propriedade	Função	Transformada
Conjugação	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
Convolução	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Primeira Diferença	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$
Diferenciação no domínio de z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$

Teorema do Valor Inicial

Se $x[n] = 0$ para $n < 0$ então

$$x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

Transformada Z - Tabela

Função	Transformada
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$\delta[n-m]$	z^{-m}
$\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

Função	Transformada
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$
$\text{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$
$r^n \,\text{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\,\text{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$

Funções de Correlacção e Densidade Espectral

Energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Correlação Cruzada

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt =$$

Autocorrelação

$$R_x(\tau) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt =$$

Funções de Correlacção e Densidade Espectral

Propriedades da Autocorrelação

1. $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$ onde $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$

2. $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau) \;\Rightarrow x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow\; R_x(\tau)$ real e tem simetria par

3. $z(t) = x(t) + y(t) \;\Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau)$

   Caso as funções sejam ortogonais
   $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \Longrightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$

Funções de Correlacção e Densidade Espectral

Função Densidade Espectral - Sinais aperiódicos

$$G_x(j\omega) = TF\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

Teorema de Wiener-Kinchine

$$\boxed{R_x(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} G_x(j\omega)}$$

Funções de Correlacção e Densidade Espectral

Energia

$$E_x \;=\; R_x(\tau) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(j\omega)d\omega$$

Função Densidade Espectral - Sinais periódicos

$$G_x(j\omega) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_x[n]|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

Funções de Correlacção e Densidade Espectral

Propriedades da Função Densidade Espectral

Relação Entrada-Saída

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\Rightarrow\; G_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 G_x(j\omega)$$

Derivação

$$z(t) = \frac{dx(t)}{dt} \;\Rightarrow\; G_z(j\omega) = \omega^2 G_x(j\omega)$$

Integração

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda \;\Rightarrow\; G_z(j\omega) = \omega^{-2} G_x(j\omega)$$