Análise e Processamento de Sinal e Imagem

III - Sinais Aleatórios e Filtragem Óptima

António M. Gonçalves Pinheiro

Departamento de Física
Universidade da Beira Interior
Covilhã - Portugal

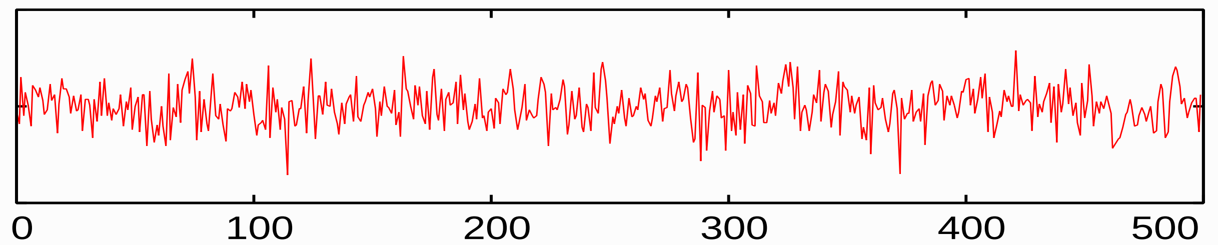
pinheiro@ubi.pt

Sinais Aleatórios e Filtragem Óptima

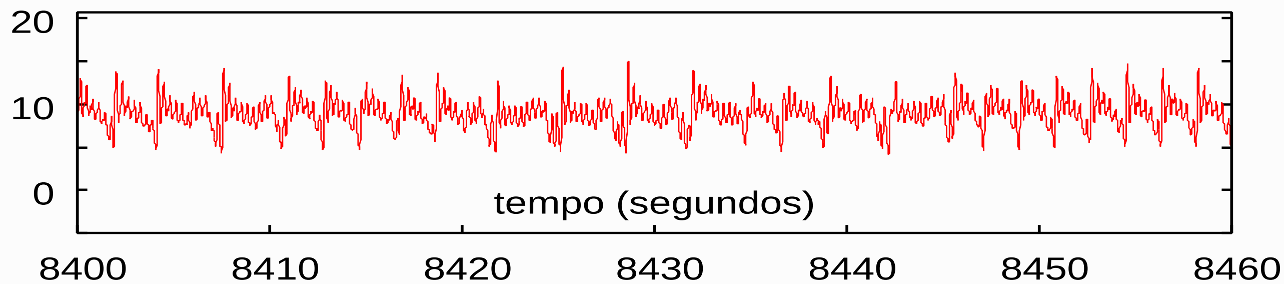
Sinais Aleatórios

Processos Estocásticos - Sinais que variam aleatoriamente no tempo.

Sinais Aleatórios são regidos por processos estocásticos.



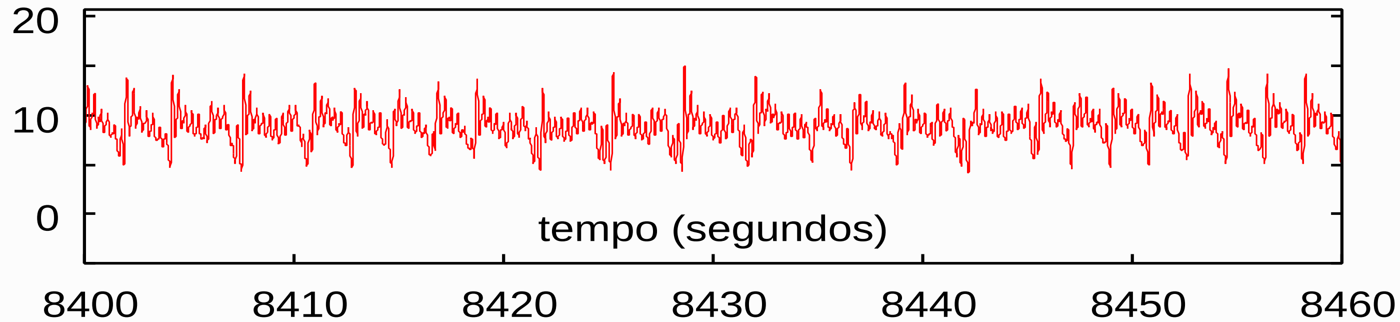
Ruído Aleatório Gaussiano



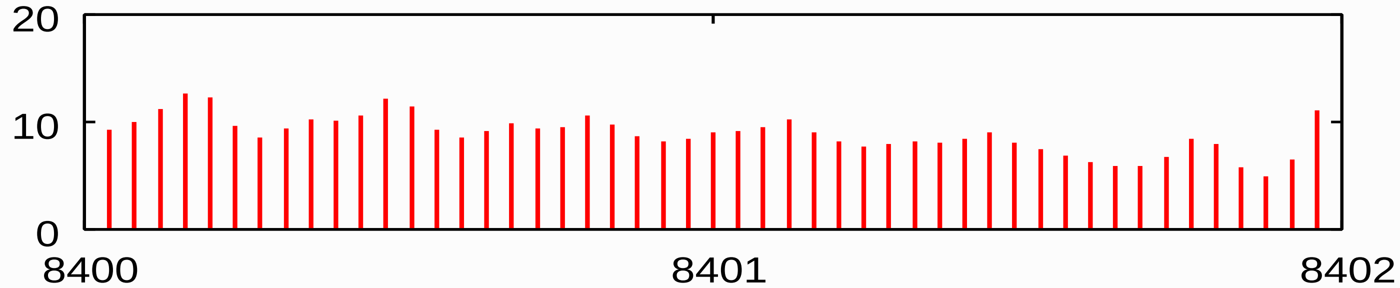
Pressão Arterial

Sinais Aleatórios

Sinais Contínuos e Discretos



Sinal contínuo - $x(t)$



Sinal discreto - $x[n]$

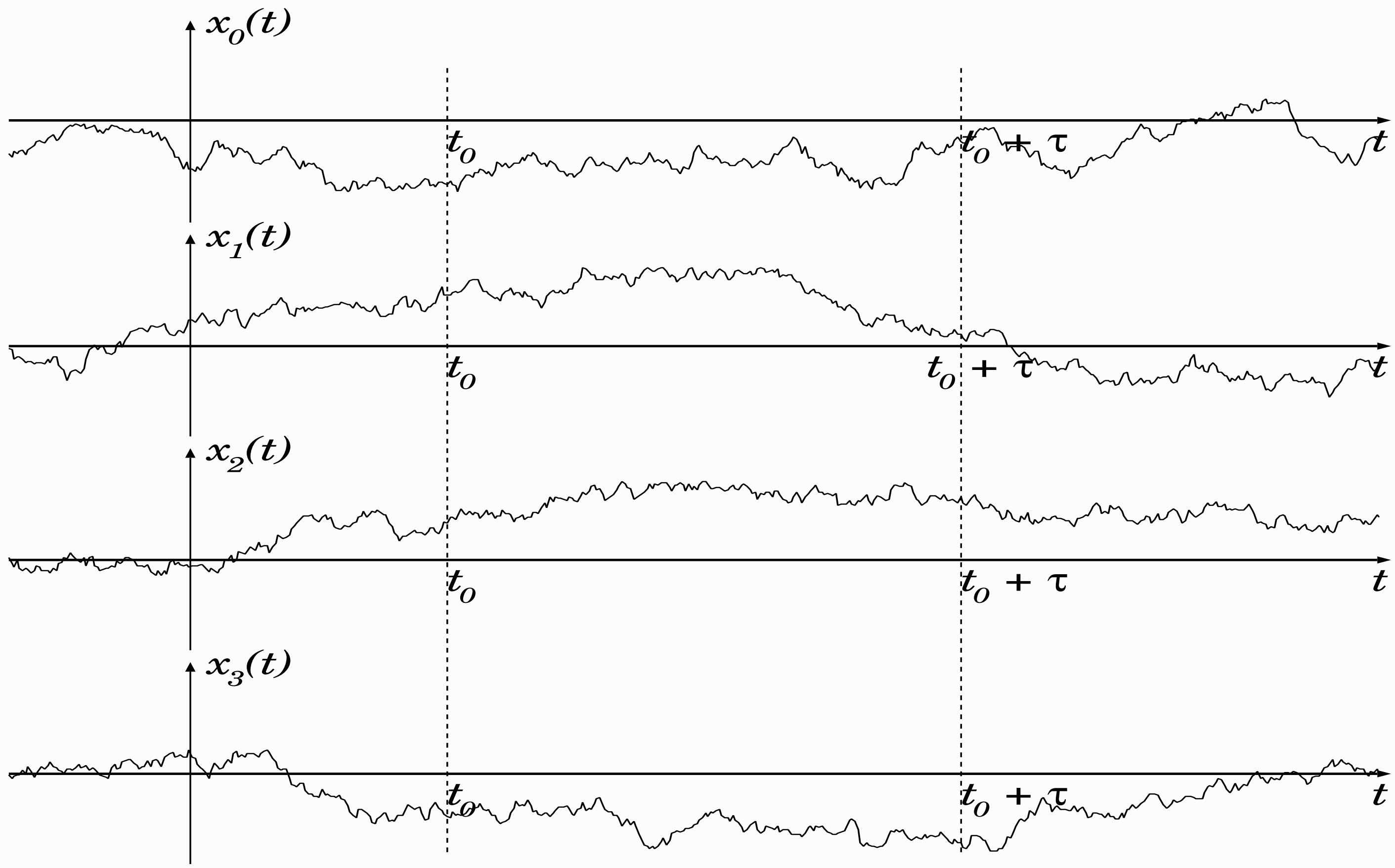
Sinais Aleatórios

Média temporal e média conjunta

	Sinal Contínuo	Sinal Discreto
Sinal aleatório com potência média finita	$x(t)$	$x[n]$
Média Temporal Componente contínua do sinal	$\langle x(t) \rangle$	$\langle x[n] \rangle$
Média Quadrátrica Temporal Potência média do sinal	$\left\langle x^2(t) \right\rangle$	$\left\langle x^2[n] \right\rangle$
Média Conjunta	$E\left[x(t)\right]$	$E\left[x[n]\right]$
Média Quadrática Conjunta	$E\left[x^2(t)\right]$	$E\left[x^2[n]\right]$

Sinais Aleatórios

Calculo de médias conjuntas



Sinais Aleatórios

Processos estacionário

Definição: Num processo estacionário as médias conjuntas são independentes do tempo de observação.

$$E\left\{x^m[n]\right\} = E\left\{x^m[n+k]\right\}$$

Processos ergódicos

Definição: Um processo estocástico é um processo ergódico se as médias conjuntas são iguais às médias temporais. Ou seja:

$$\langle x^m[n] \rangle = E\left\{x^m[n]\right\}$$

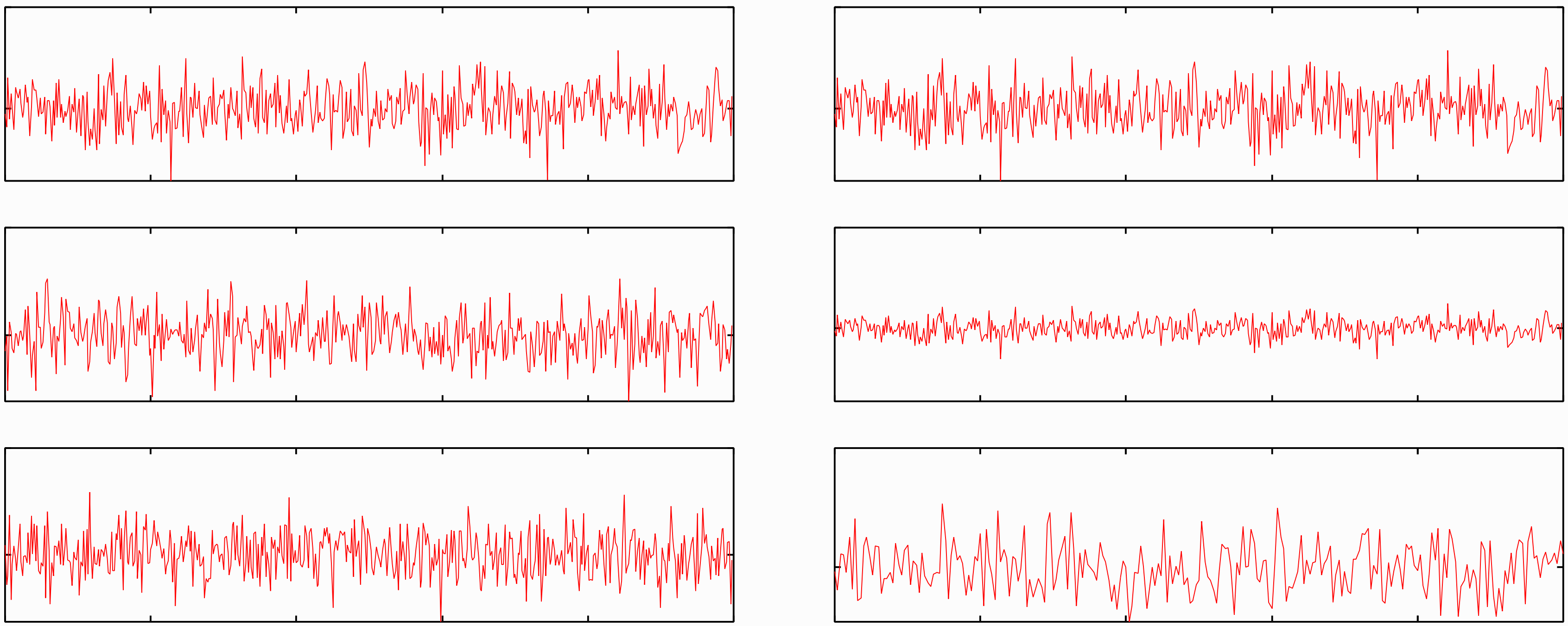
Nota 1: Os processos ergódicos são estacionários

Nota 2:

$$E\left\{g(x)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \qquad\qquad E\left\{g[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]p[n]$$

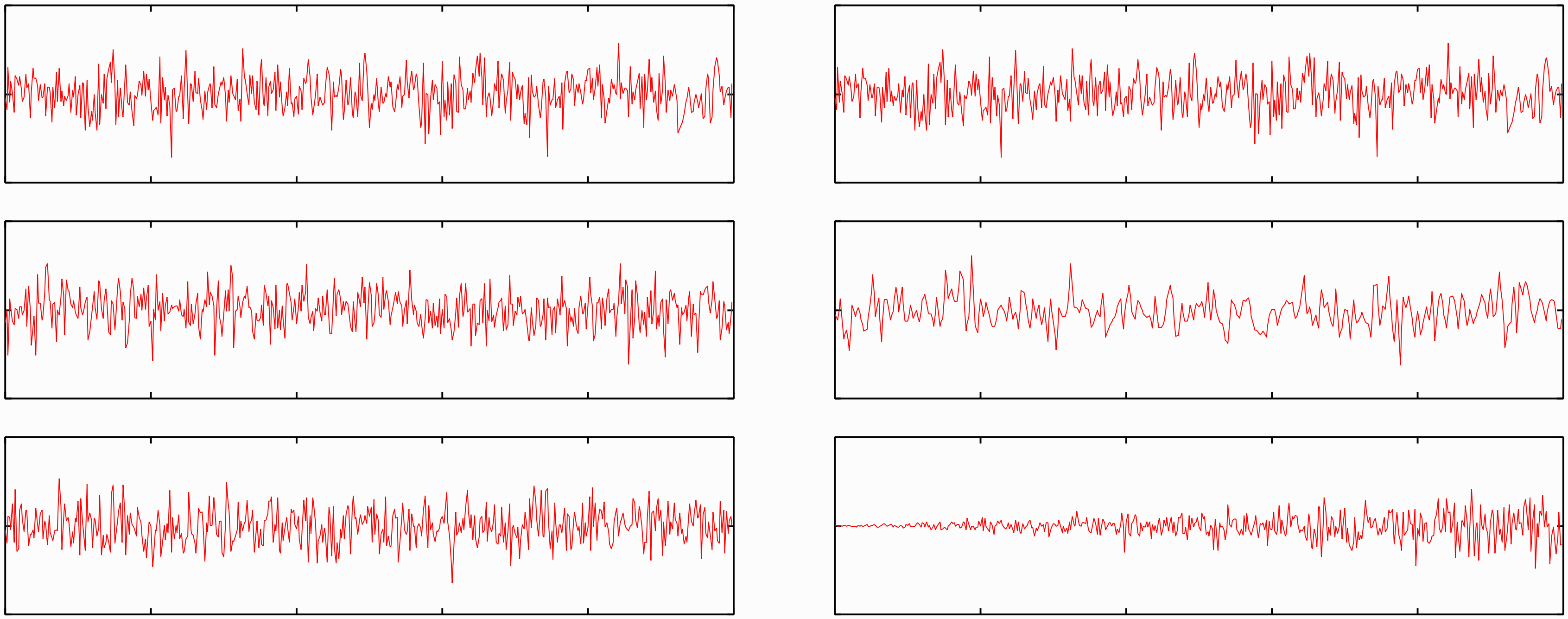
Sinais Aleatórios

Exemplos de Sinais Aleatórios



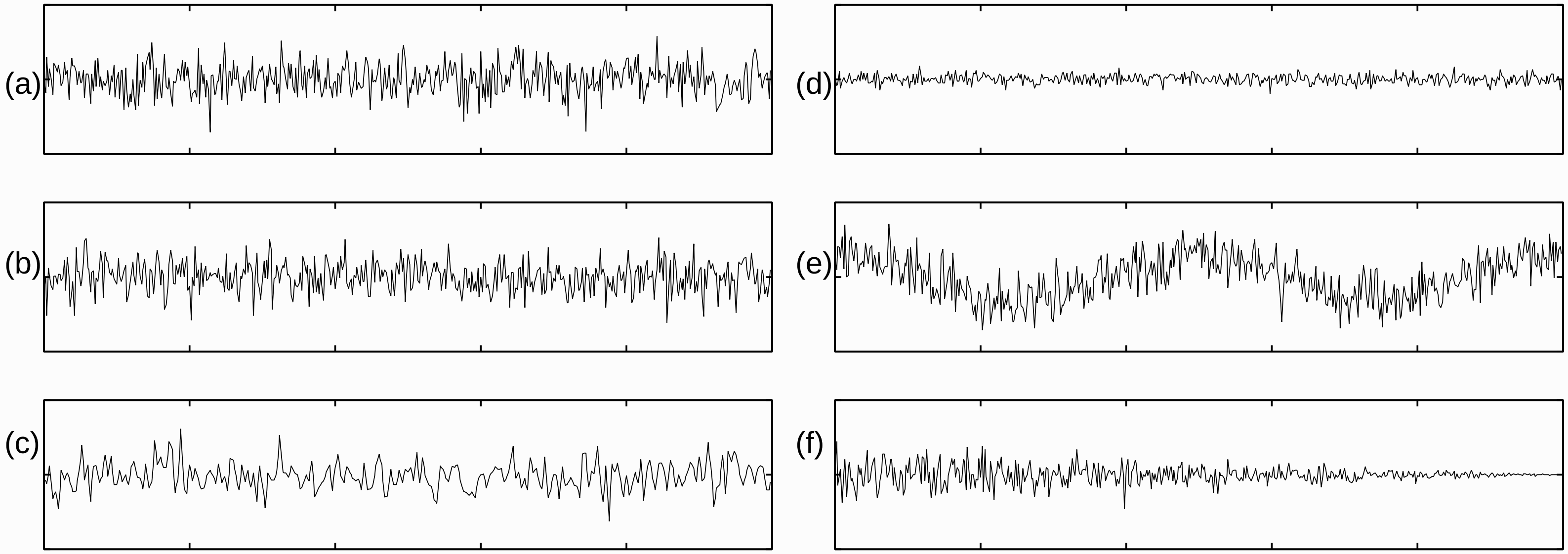
Sinais Aleatórios

Exemplos de Sinais Aleatórios



Sinais Aleatórios

Exemplos de Sinais Aleatórios



Sinais Aleatórios

Propriedades do processo ergódicos

- A média $\bar{x} = \langle x[n] \rangle = E\{x[n]\}$ é a componente contínua (DC) do sinal $x[n]$.
- O quadrado da média, $\bar{x}^2$, é a potência DC.
- A média quadrada, $\bar{x^2} = \left\langle x^2[n] \right\rangle = E\left\{x^2[n]\right\}$, é a potência média do sinal.
- A variância $\sigma_x^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$ é a potência relativa à parte do sinal que varia no tempo, ou seja, sem componente DC.
- O desvio padrão σ_x é o valor eficaz do sinal.

Sinais Aleatórios

Funções de Correlação

	Sinais Discretos	Sinais Contínuos
Correlação cruzada	$R_{xy}[k] \;=\; E\left\{x[n]y^{*}[n-k]\right\}$	$R_{xy}(\tau) \;=\; E\left\{x(t)y^{*}(t-\tau)\right\}$
Auto-correlação	$R_{x}[k] \;=\; E\left\{x[n]x^{*}[n-k]\right\}$	$R_{x}(\tau) \;=\; E\left\{x(t)x^{*}(t-\tau)\right\}$

Sinais Aleatórios

Propriedades da Auto-correlação:

- $R_x[-k] = R_x[k]$ - Função Par

- $R_x[0] = \overline{x^2} = \sigma_x^2 + \bar{x}^2 \geq R_x[k]$

- De 1 e 2 pode-se concluir que $R_x[k]$ é uma função par com um máximo em $k = 0$

- Em processos não periódicos $\lim_{k \to +\infty} R_x[|k|] = \bar{x}^2$

- No caso de processos periódicos, a autocorrelação é também periódica, com o mesmo período que o processo.

Nota: Provar que $E\{x[k-k_1]x[k-k_2]\} = R_x[k_1 - k_2]$ se $x[k]$ for um processo ergódico e real.

Sinais Aleatórios

Processo Estacionário em Sentido Restrito - WSS

WSS - “Wilde Sense Stationarity"

Condições de Estacionaridade

1. A média do processo é constante: $\langle x[n] \rangle = \bar{x}$.
2. A autocorrelação do processo $R_x[k]$ só depende do valor de k.
3. A variância do processo é finita: $\sigma_x^2 = \left\langle x^2[n] \right\rangle - \bar{x}^2 < \infty$

Sinais Aleatórios

Densidade Espectral de Potência - P_x

Teorema de Wiener-Kinchine

Sinal contínuo - $x(t)$

$$\boxed{R_x(\tau) \xleftrightarrow{\text{TF}} P_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[x[(t)x^*(t-\tau)\right] e^{-j\omega\tau} d\tau}$$

Sinal discreto - $x[n]$

$$\boxed{R_x[k] \xleftrightarrow{\text{TF}} P_x\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left[x[n]x^*[n-k]\right] e^{-j\Omega k}}$$

Sinais Aleatórios

Densidade Espectral de Potência - P_x

Relação entre a entrada e a saída num SLIT

Sistema contínuo - $h(t)$

$$R_y(\tau) \overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} P_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \, P_x(j\omega)$$

Sistema discreto - $h[n]$

$$R_y[k] \overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} P_y\left(e^{j\Omega}\right) = \left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 \, P_x\left(e^{j\Omega}\right)$$

Sinais Aleatórios

Propriedades da Densidade Espectral de Potência de um Processo Estacionário

Sinais Discretos

1. *Simetria:* $P_x\left(e^{j\Omega}\right) = P_x^*\left(e^{j\Omega}\right)$
   Se $x[n]$ é real, então $P_x\left(e^{j\Omega}\right) = P_x\left(e^{-j\Omega}\right)$ (função par)

2. *Positividade:* $P_x\left(e^{j\Omega}\right) \geq 0$

3. *Potência total:*

$$\bar{x^2} = R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x\left(e^{j\Omega}\right) d\Omega$$

Sinais Contínuos

1. *Simetria:* $P_x(j\omega) = P_x^*(j\omega)$
   Se $x(t)$ é real, então $P_x(j\omega) = P_x(-j\omega)$ (função par)

2. *Positividade:* $P_x(j\omega) \geq 0$

3. *Potência total:*

$$\bar{x^2} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_x(j\omega)\, d\omega$$

Sinais Aleatórios

Exemplo 1

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

com A e ω_0 constantes e θ varia aleatoriamente de forma uniformemente distribuida (entre $-\pi < \theta \leq \pi$).

Resolução:

$$R_x(\tau) = E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\} = \frac{A^2}{2}E\left\{\cos(\omega_0\tau)\right\} + \frac{A^2}{2}E\left\{\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\theta)\right\}$$

$$E\left\{\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\theta)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\theta)p(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\theta)d\theta = 0$$

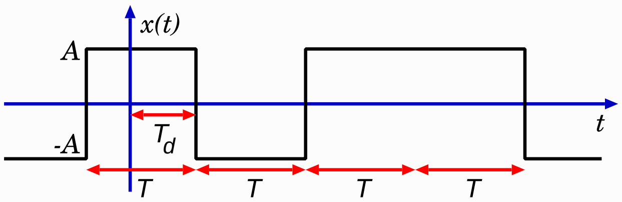
Solução:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) \overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} P_x(j\omega) = \frac{A^2\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Sinais Aleatórios

Exemplo 2

Onda binária aleatória:



Em $(n-1)T \; < \; t - T_d \; < \; nT$, $x(t)$ assume valor $+A$ ou $-A$ de forma equiprovável.
O tempo de atraso T_d é uma variável aleatória uniformemente distribuida no intervalo $[0, T]$.

Resolução:

$$R_x(\tau) = E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\}$$

Se $|\tau| > T$ estamos perante duas amostras diferentes e independentes da onda binária. Como os símbolos são equiprováveis $E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\} = E\left\{x(t)\right\}\; E\left\{x^*(t-\tau)\right\} = 0$

$x(t)$ e $x(t-\tau)$ só estão no mesmo intervalo se: $t + (T_d - T) < t - |\tau| \;\Rightarrow\; T_d < T - |\tau|$.
Nesse caso

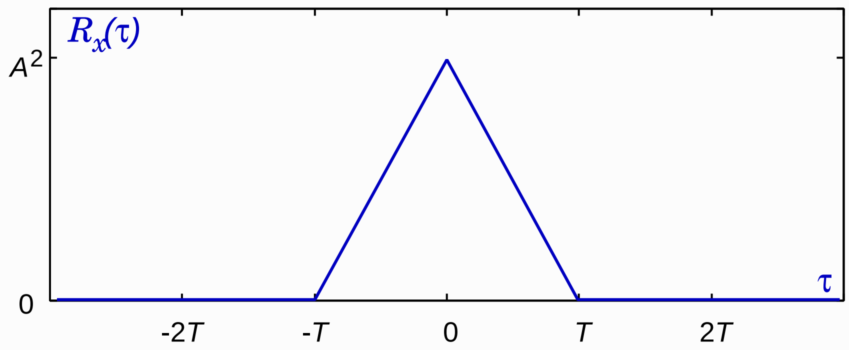
$$E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\} = A^2 \int_0^{T-|\tau|} \frac{1}{T} dT_d = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$$

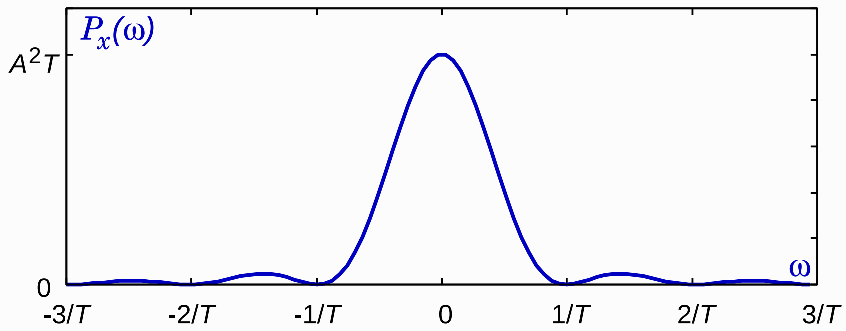
Sinais Aleatórios

Exemplo 2 (continuação)

Solução:

$$R_x(\tau) = A^2\Lambda(\tau/T) = A^2\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)[u(t+T)-u(t-T)] \xleftrightarrow{\text{TF}} P_x(j\omega) = A^2T\text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$





Sinais Aleatórios

Ruído Térmico

Ruído térmico que surge devido ao movimento de electrões e portanto surge inevitavelmente associado à corrente eléctrica em materiais condutores.

O ruído térmico é uma variável aleatória $x(t)$ com distribuição gaussiana, em que:

- $\bar{x} = 0$
- $\bar{x^2} = \sigma_x^2 = \frac{2(\pi K T)^2}{3h} R V^2$, em que
  T - Temperatura
  K - constante de Boltzman
  h - constante de Plank
- $P_x(j\omega) = \frac{Rh|\omega|}{\pi\left(e^{h\omega/(2\pi K J)} - 1\right)}$ $[V^2/Hz]$

Sinais Aleatórios

Ruído Branco

Caracterizado por:

- variável aleatória gaussiana.
- $P(j\omega) = \eta/2$ - densidade espectral de potência constante ao lonngo de grande faixas de frequências.
- $R(\tau) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{P(j\omega)\right\} = (\eta/2)\delta(\tau)$

Propriedade:

$R(\tau \neq 0) = 0$, logo 2 amostras diferentes de um sinal de ruído branco gaussiano, são sempre:

- não correlacionadas $\Longrightarrow$ logo são estatisticamente independentes

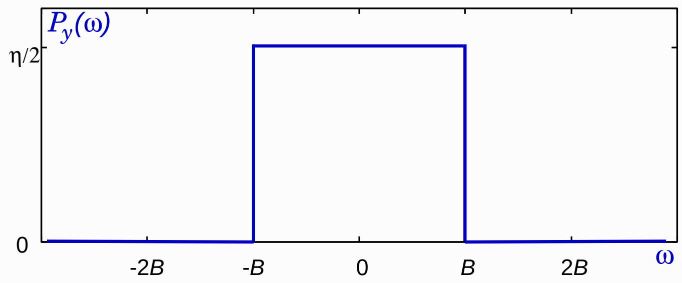
Sinais Aleatórios

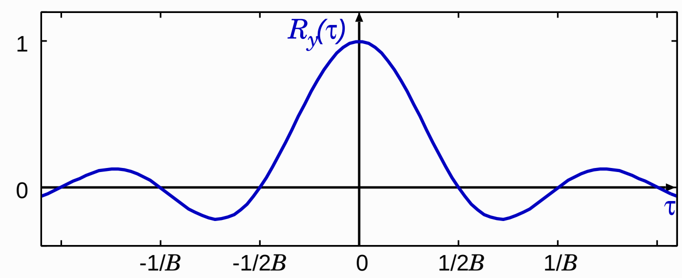
Filtragem de Ruído Branco

Considerando:

- $h(t)$ - filtro passa baixo ideal com largura de banda B
- $x(t)$ - ruído branco

$$P_y(j\omega) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{2B}\right) \overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} R_y(\tau) = \eta B \text{sinc}(2B\tau)$$





Sinais Aleatórios

Propriedade

Se a entrada de um sistema linear e invariante no tempo for um sinal aleatório gaussiano, então a saída será um sinal aleatório gaussiano.

- podem mudar as médias estatísticas, mas não muda o modelo de probabilidade.
- ruído branco filtrado origina sinal aleatório gaussiano, que não é ruído branco.

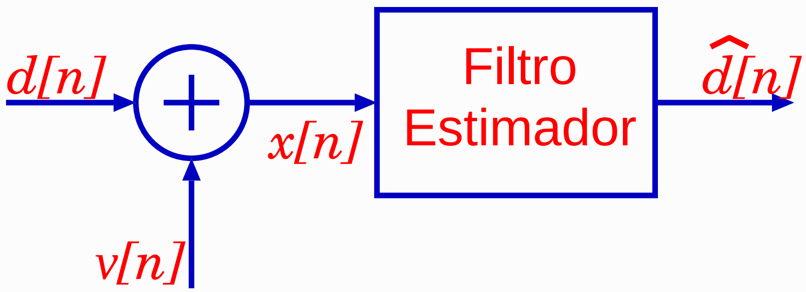
Relação Sinal Ruído - SNR

Considerando um sinal $d[n]$ corrompido com ruído branco gaussiano $v[n]$, em que resulta $x[n] = d[n] + v[n]$, define-se:

$$\text{SNR} = \frac{R_d[0]}{\sigma_v^2}$$

SNR - medida da potência do ruído relativamente à potência do sinal.

Estimação Linear - Filtragem Óptima



- $d[n]$ - Sinal
- $v[n]$ - Ruído
- $x[n]$ - Sinal corrompido com ruído
- $\hat{d}[n]$ - Sinal Estimado

Objectivo - Estimar um sinal aleatório que só está disponível corrompido com ruído.

Duas soluções:

- Filtro de Wiener - *Sinais Estacionários (WSS - Sentido Restrito)*
- Filtro de Kalman - *Sinais Não Estacionários*

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Problemas a considerar:

- **Filtragem** - Estimar $d\hat{[n]}$ quando o sinal está corrompido com ruído, $x[n] = d[n] + v[n]$ com um *filtro estimador* causal, ou seja, considerando o valor presente e passados de $x[n]$.

- **Suavização** - O mesmo problema, mas considerando todos os dados possíveis, sendo permitido que o *filtro estimador* não causal.

- **Predição** - Sinal é estimado em $n + k$ (futuro), usando dados observados até n.

- **Desconvolução** - Quando $x[n] = d[n] * g[n] + v[n]$, em que $g[n]$ é a resposta impulsiva de um SLIT.

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener

Filtro estimador - $w[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} W(z)$

O filtro **FIR de Wiener** produz uma *estimativa do erro quadrático médio mínimo* do processo $d[n]$ filtrando o processo estatisticamente relacionado $x[n]$.

Assume-se que os processos $x[n]$ e $d[n]$ são estacionários em sentido restrito com:

- autocorrelação de $x[n]$ - $R_x[k]$
- autocorrelação de $d[n]$ - $R_d[k]$
- correlação cruzada: $R_{dx}[k]$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener

N - comprimento do filtro **FIR de Wiener**

$$W(z) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] z^{-k}$$

A estimativa do filtro à saída é dada pela convolução:

$$\hat{d}[n] = \sum_{l=0}^{N-1} w[l] x[n-l]$$

O filtro **FIR de Wiener** leva a coeficientes $w[n]$ que minimiza o erro quadrático médio, ou seja:

$$\xi = E\left\{|e[n]|^2\right\} = E\left\{\left|d[n] - \hat{d}[n]\right|^2\right\} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial w[m]} = 0$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener

Manipulando matemáticamente, obtemos (*Princípio da ortogonalidade*):

$$\frac{\partial \xi}{\partial w[m]} = 0 \;\Rightarrow\; E\left\{e[n]x^*[n-m]\right\} = 0,\;\; m = 0, 1, ..., N-1$$

Considerando

$$e[n] = d[n] - \hat{d}[n] = d[n] - \sum_{l=0}^{N-1} w[l]x[n-l]$$

Resulta

$$E\left\{d[n]x^*[n-m]\right\} - \sum_{l=0}^{N-1} w[l]E\left\{x[n-l]x^*[n-m]\right\} = 0$$

Ou seja:

$$\sum_{l=0}^{N-1} w[l]R_x[m-l] = R_{dx}[m],\;\; m = 0, 1, ..., N-1$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener

Considerando que $R_x[k] = R_x^*[-k]$ resulta um sistema de equações na forma matricial (*Equações de Winer-Hopf*):

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{R}_{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{R}_x^{-1}\,\mathbf{R}_{dx}$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x^*[1] & \ldots & R_x^*[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \ldots & R_x^*[N-2] \\ R_x[2] & R_x[1] & \ldots & R_x^*[N-3] \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \ldots & R_x[0] \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ . \\ . \\ . \\ w[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{R}_{dx} = \begin{bmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[1] \\ R_{dx}[2] \\ . \\ . \\ . \\ R_{dx}[N-1] \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_x$ - Matriz de autocorrelação, Hermitiana e de “Toeplitz"
$\mathbf{w}$ - vector dos coeficientes do filtro
$\mathbf{R}_{dx}$ - vector de correlação cruzada entre o sinal desejado $d[n]$ e o sinal observado $x[n]$.

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener

Equações de Wiener-Hopf para o filtro **FIR de Wiener**

Equações de Wiener-Hopf

$$\sum_{l=0}^{N-1} w[l] R_x[m-l] = R_{dx}[m], \;\; m = 0, 1, ..., N-1$$

Correlações

$$R_x = E\left\{x[n]x^*[n-m]\right\}$$

$$R_{dx} = E\left\{d[n]x^*[n-m]\right\}$$

Mínimo Erro

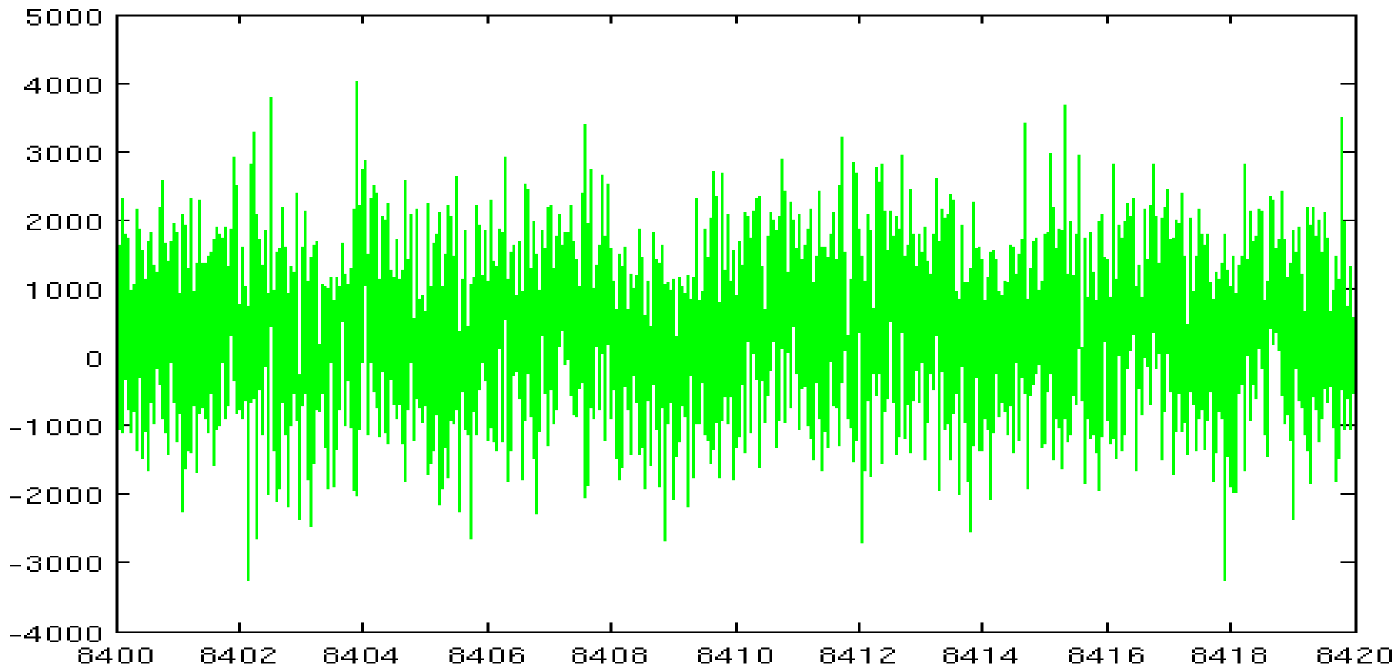
$$\xi_{min} = R_d(0) - \sum_{l=0}^{N-1} w[l] R_{dx}^*[l]$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{R}_{dx} \quad \Rightarrow \quad \xi_{min} = R_d(0) - \mathbf{R}_{dx}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Exemplo de Estimação com Filtro **FIR** de Wiener

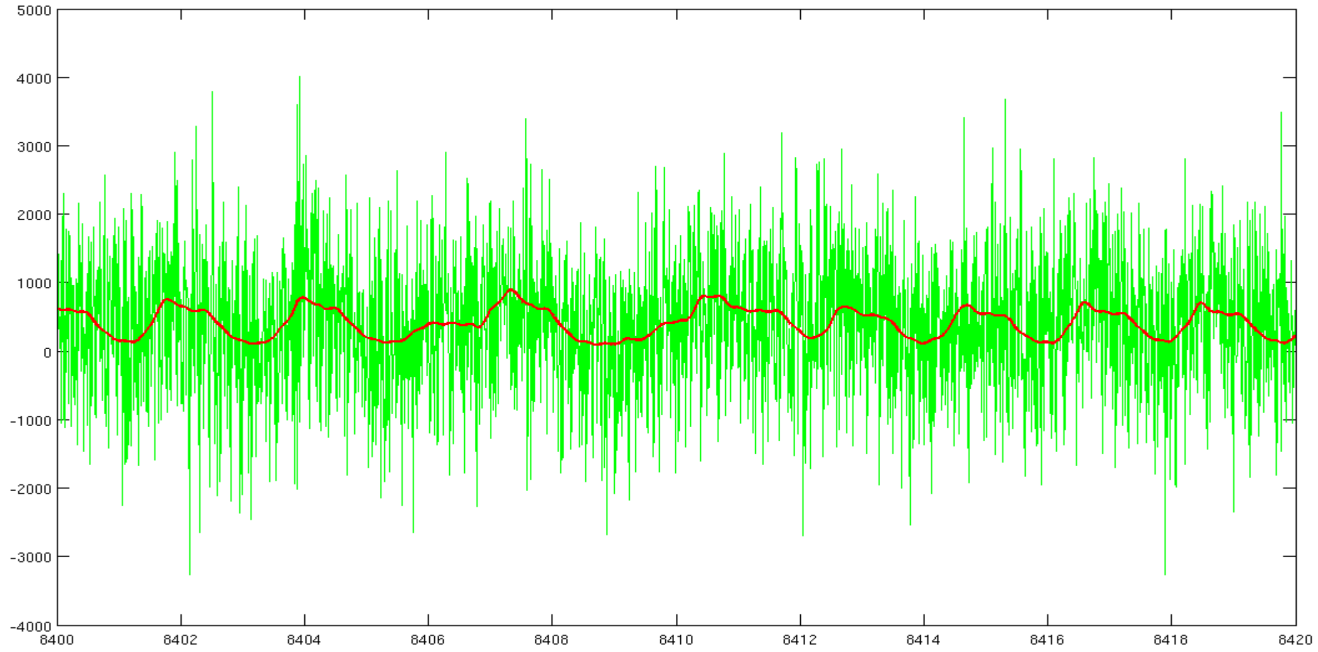
Sinal corrompido $x[n]$



Estimação Linear - Filtragem Óptima

Exemplo de Estimação com Filtro **FIR** de Wiener

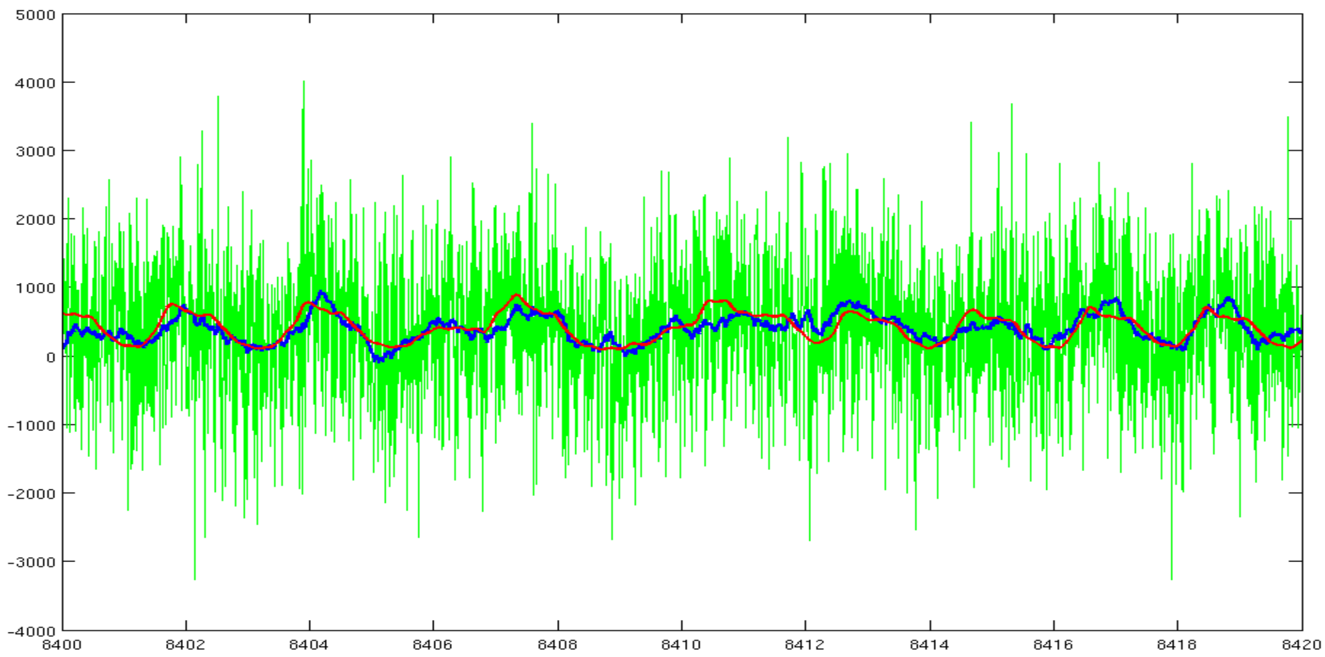
Sinal corrompido $x[n]$ e sinal original $d[n]$.



Estimação Linear - Filtragem Óptima

Exemplo de Estimação com Filtro **FIR** de Wiener

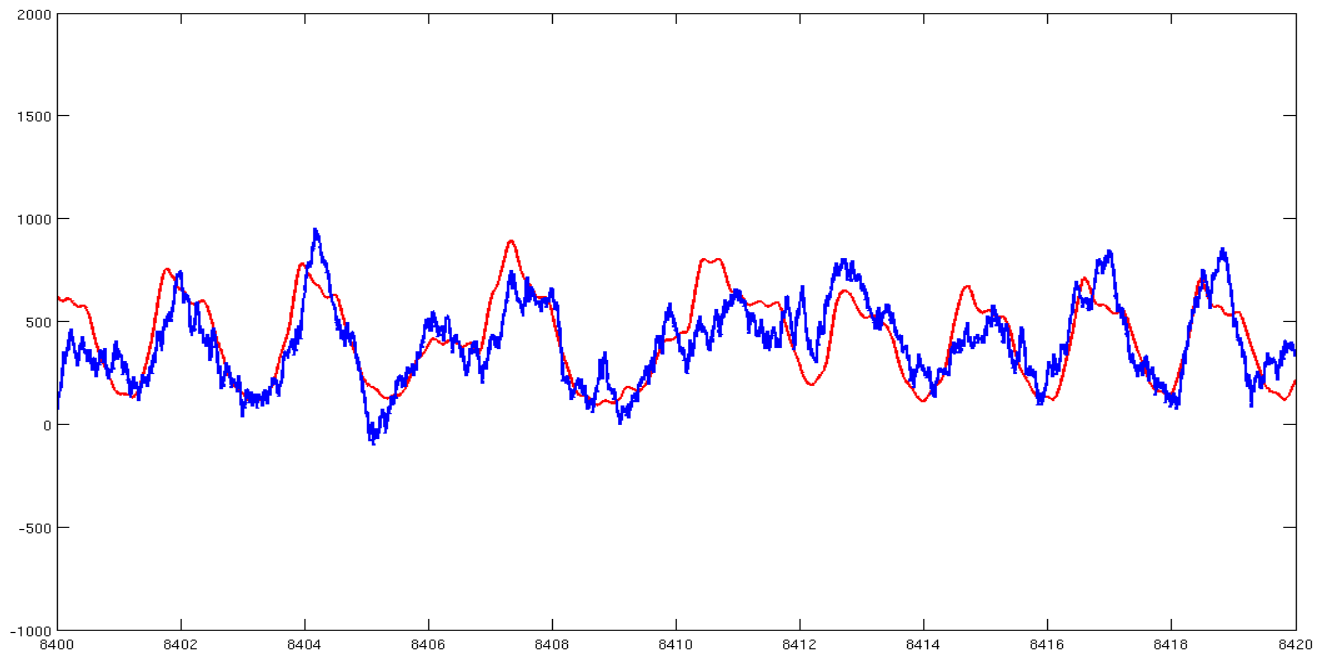
Sinal corrompido $x[n]$, sinal original $d[n]$ e sinal estimado $\hat{d}[n]$



Estimação Linear - Filtragem Óptima

Exemplo de Estimação com Filtro **FIR** de Wiener

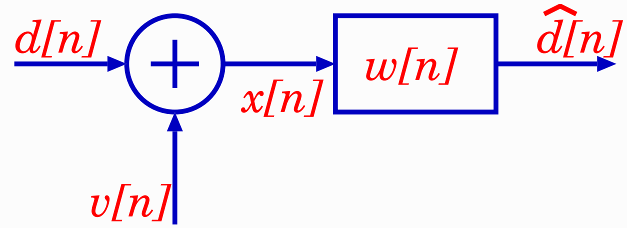
Sinal original $d[n]$ e sinal estimado $\hat{d}[n]$



Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener - **Filtragem**

Sinal $d[n]$ corrompido com ruído $v[n]$, resultando em:



$$x[n] = d[n] + v[n]$$

Exemplos de aplicação:

- recuperação de sinais adquiridos em ambientes ruidosos
- enriquecimento da qualidade de imagem
- restauração de gravações antigas

Consideramos o ruído e o sinal não correlacionados. Logo $R_{dv}[k] = E\left\{d[n]v^*[n-k]\right\} = 0$. Então:

$$R_{dx}[k] = E\left\{d[n]x^*[n-k]\right\} = E\left\{d[n]d^*[n-k]\right\} + E\left\{d[n]v^*[n-k]\right\} = R_d[k]$$

$$R_x[k] = E\left\{x[n+k]x^*[n]\right\} = E\left\{\left[d[n+k] + v[n+k]\right]\ \left[d[n] + v[n]\right]^*\right\} = R_d[k] + R_v[k]$$

Equação de Wiener-Hopf (ruído e sinal não correlacionados)

$$\boxed{\left[\mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v\right]\mathbf{w} = \mathbf{R}_d}$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener - **Exemplo de Filtragem**

Consideremos um processo estacionário $d[n]$ com autocorrelação $R_d[k] = \alpha^{|k|}$. $\quad |\alpha| < 1$

corrompido com ruído branco não correlacionado com variância σ_v^2, tal que $x[n] = d[n] + v[n]$. Pretende-se desenhar um filtro FIR de Wiener de primeira ordem (comprimento 2) para reduzir o efeito do ruído e obter a melhor estimativa de $d[n]$.

Logo , o filtro será dado por: $W(z) = w[0]+w[1]z^{-1}$ $\qquad N = 2$

sendo a equação de Wiener-Hopf dada por: $\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[1] \end{bmatrix}$

resulta

$$W(z) = \frac{1}{(1+\sigma_v^2)^2 - \alpha^2} \left[\left(1 + \sigma_v^2 - \alpha^2 + \alpha\sigma_v^2 z^{-1} \right) \right]$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros **FIR** de Wiener - **Exemplo de Filtragem**

Considerando $\alpha = 0.8$ e $\sigma_v^2 = 1$ obtemos:

SNR sem o filtro:

$$\text{SNR} = \frac{R_d[0]}{\sigma_v^2} = \frac{\alpha^0}{\sigma_v^2} = 1$$

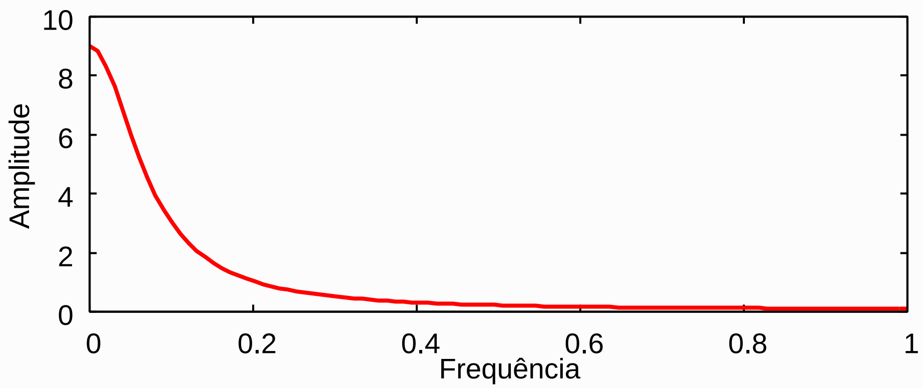
SNR com o filtro:

$$\text{SNR} = \frac{E\left\{|w[n] * d[n]|^2\right\}}{E\left\{|w[n] * v[n]|^2\right\}}$$

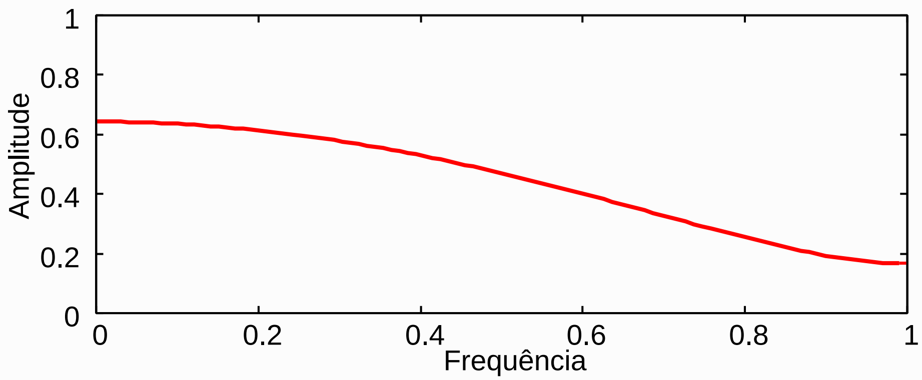
$$\text{SNR} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_d \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{R}_v \mathbf{w}} = \frac{0.37748}{0.2206}$$

Logo a SNR será dada por:

$$\text{SNR}_{dB} = 10 \log_{10} \frac{0.37748}{0.2206} = 2.302dB$$



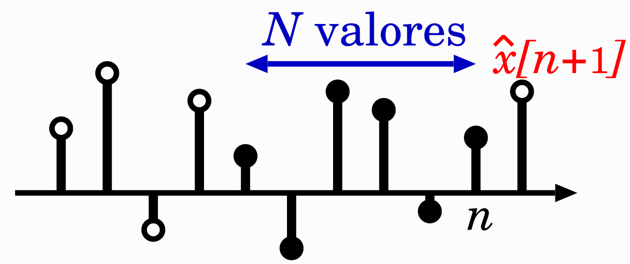
Amplitude do espectro de potência do processo $d[k]$.



Resposta em Amplitude do filtro de Wiener

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener - **Predicção**



Neste caso o objectivo é estimar o sinal em $n+1$, $x[n+1]$:

$$\hat{x}[n+1] = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]x[n-k]$$

Se considerarmos $d[n] = x[n+1]$ temos uma situação idêntica à anterior.

Sendo

$$R_{dx}[k] = E\left\{d[n]x^*[n-k]\right\} = E\left\{x[n+1]x^*[n-k]\right\} = R_x[k+1]$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener - **Predicção**

As **equações de Wiener-Hopf** resultantes são dadas por:

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x^*[1] & \dots & R_x^*[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \dots & R_x^*[N-2] \\ R_x[2] & R_x[1] & \dots & R_x^*[N-3] \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ . \\ . \\ . \\ w[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}[1] \\ R_{dx}[2] \\ R_{dx}[3] \\ . \\ . \\ . \\ R_{dx}[N] \end{bmatrix}$$

Sendo o erro quadrático médio dado por:

$$\xi_{min} = R_x(0) - \sum_{k=0}^{N-1} w[k] R_x^*[k+1]$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener - **Exemplo de Predicção**

Consideremos um processo estacionário $x[n]$ com autocorrelação $R_x[k] = \alpha^{|k|}$.

O preditor de primeira ordem (comprimento 2) é da forma:

$$\hat{x}[n+1] = w[0]x[n] + w[1]x[n-1]$$

Resultando nas **equações de Wiener-Hopf**:

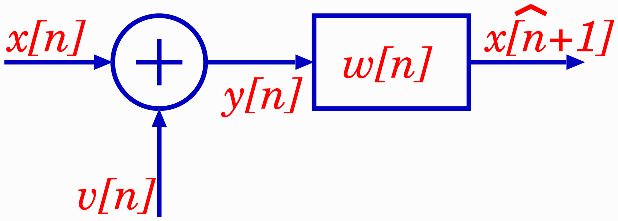
$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

O preditor de primeira ordem é dado por: $\boxed{\hat{x}[n+1] = \alpha x[n]}$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener - **Predicção no ruído**

Neste caso o objectivo é estimar o sinal em $n+1$, $x[n+1]$, quando ele se encontra corrompido com ruído:



Sendo assim

$$\hat{x}[n+1] = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]y[n-k]$$

Sendo a **equação de Wiener-Hopf** dada por:

$$\mathbf{R}_y\mathbf{w} = \mathbf{R}_{dy}$$

com $\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_v$ caso o sinal e o ruído sejam não correlacionados.

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener - **Predicção de amostra** $n+m$

Equações de Wiener-Hopf:

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x^*[1] & \ldots & R_x^*[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \ldots & R_x^*[N-2] \\ R_x[2] & R_x[1] & \ldots & R_x^*[N-3] \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \ldots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ . \\ . \\ . \\ w[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}[m] \\ R_{dx}[m+1] \\ R_{dx}[m+2] \\ . \\ . \\ . \\ R_{dx}[m+N-1] \end{bmatrix}$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener IIR

Consideramos o filtro IIR de Wiener com função impulsiva $h[n]$ com função de transferência dada por:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

$H(z)$ é tal que minimiza o erro quadrático médio:

$$\xi = E\left\{ |e[n]|^2 \right\}, \quad \text{com } e[n] = d[n] - \hat{d}[n] = d[n] - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]x[n-l]$$

O mínimo do erro quadrático médio implica:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h[m]} = 0 \;\Rightarrow\; E\left\{ e[n]x^*[n-m] \right\} = 0; \;\; -\infty < m < +\infty$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener IIR

Combinando as duas últimas expressões:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]R_x[m-l] = R_{dx}[k]; \ -\infty < m < +\infty$$

Que é equivalente a:

$$h[m] * R_x[m] = R_{dx}[m]$$

Que resulta no domínio da frequência no <u>filtro não causal</u>

$$\boxed{H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{P_{dx}\left(e^{j\Omega}\right)}{P_x\left(e^{j\Omega}\right)}}$$

Neste caso, o erro quadrático médio mínimo é dado por:

$$\xi_{min} = R_d(0) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l]R_{dx}^*(l) = R_d(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\Omega}\right) P_{dx}\left(e^{j\Omega}\right) d\Omega$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtros de Wiener IIR **Causal**

Aproximação semelhante, só que consideramos a resposta impulsiva nula para $n < 0$

$$\hat{d}[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] \;\Rightarrow\; \sum_{l=0}^{+\infty} h[l]R_x[k-l] = R_{dx}[k]$$

Função de Transferência

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \frac{P_{dx}(z)}{Q^*(1/z^*)}}$$

Em que $Q(z)$ resulta da factorização espectral de

$$P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*)$$

Erro Mínimo

$$\xi_{min} = R_d(0) - \sum_{l=0}^{+\infty} h[l]R_{dx}^*(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(P_d\left(e^{j\Omega}\right) - H\left(e^{j\Omega}\right) P_{dx}\left(e^{j\Omega}\right)\right) d\Omega$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtro de Kalman Discreto

Filtro de Wiener requer sinais $d[n]$ e $x[n]$ WSS
Os **filtros de Kalman** são aplicados a sinais não estacionários.

Equação de Estado	$\mathbf{d}[n] = \mathbf{A}[n-1] + \mathbf{w}[n]$
Equação de Observação	$\mathbf{d}[n] = \mathbf{A}[n-1]\mathbf{d}[n-1] + \mathbf{w}[n]$
Inicialização	$\hat{\mathbf{d}}[0\|0] = E\left\{\mathbf{d}[0]\right\}$ $\mathbf{P}[0\|0] = E\left\{\mathbf{d}[0]\mathbf{d}^H[0]\right\}$

Cálculo
Para $n = 1, 2, ...,$ calcular

$$\hat{\mathbf{d}}[n|n-1] = \mathbf{A}[n-1]\hat{\mathbf{d}}[n-1|n-1]$$

$$\mathbf{P}[n|n-1] = \mathbf{A}[n-1]\mathbf{P}[n-1|n-1]\mathbf{A}^H[n-1] + \mathbf{Q}_w[n]$$

$$\mathbf{K}[n] = \mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n] \left[\mathbf{C}[n]\mathbf{P}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n] + \mathbf{Q}_v[n]\right]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{d}}[n|n] = \hat{\mathbf{d}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n]\left[\mathbf{x}[n] - \mathbf{C}[n]\hat{\mathbf{d}}[n|n-1]\right]$$

$$\mathbf{P}[n|n] = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}[n]\mathbf{C}[n]\right]\mathbf{P}[n|n-1]$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtro de Kalman Discreto - Exemplo

Estimação de um valor constante corrompido por ruído branco não correlacionado de média nula.
Nesse caso a equação de estado é dada por: $d[n] = d[n-1]$
Sendo observado: $x[n] = d[n] + v[n]$
Logo: $\mathbf{A}[n] = 1$, $\mathbf{C}[n] = 1$, $\mathbf{Q}_w[n] = 0$ e $\mathbf{Q}_v[n] = \sigma_v^2$
Como $x[n]$ é um escalar, a covariância do erro também é escalar, $P[n|n] = E\left\{e^2[n|n]\right\}$, com $e[n|n] = d[n] - \hat{d}[n|n]$
Aplicando as equações:
$P[n-1] = P[n|n-1] = P[n-1|n-1]$, $k[n] = P[n-1]\left[P[n-1] + \sigma_v^2\right]^{-1}$

$$P[n] = [1 - K[n]]\,P[n-1] = \frac{P[n-1]\sigma_v^2}{P[n-1] + \sigma_v^2} \Leftarrow P[n] = \frac{P[0]\sigma_v^2}{n\,P[0] + \sigma_v^2}$$

$$k[n] = \frac{P[n-1]}{P[n-1] + \sigma_v^2} = \frac{P[0]}{n\,P[0] + \sigma_v^2}$$

Estimação Linear - Filtragem Óptima

Filtro de Kalman Discreto - Exemplo

Obtemos então para o filtro de Kalman:

$$\hat{d}[n] = \hat{d}[n-1] + \frac{P[0]}{n\,P[0] + \sigma_v^2}\left[x[n] - \hat{d}[n-1]\right]$$

Nota:
Supor que $\hat{d}[0] = 0$ e que $P[0] \to \infty$, ou seja, não há qualquer informação à priori sobre d. Então:

$$k[n] = \frac{1}{n} \Rightarrow \hat{d}[n] = \frac{n-1}{n}\hat{d}[n-1] + \frac{1}{n}x[n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x[k]$$

Ou seja, a média.